Capítulo 8
Desarrollos

Uno de los problemas que debe atender la representación grafica es el desarrollo de piezas que van a ser construidas por corte y plegado.

Consiste en abrir la superficie a desarrollar por una línea, por ejemplo una arista de un poliedro o una generatriz si se trata de una superficie curva desarrollable desplegar la superficie total en un plano. Como ejemplo vemos un prisma oblicuo en figura 127 y su desarrollo en figura 128.

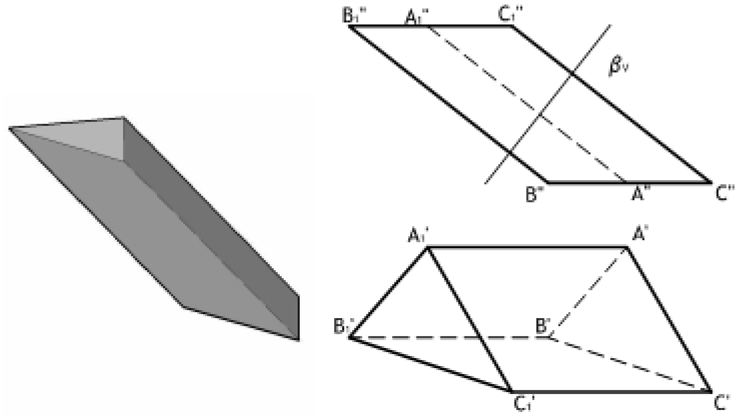


Figura 127. Prisma oblicuo: ilustración y vistas

Esta clase de ejercicios son habituales en los cursos de representación gráfica, dada la representación de un objeto trazar su desarrollo.

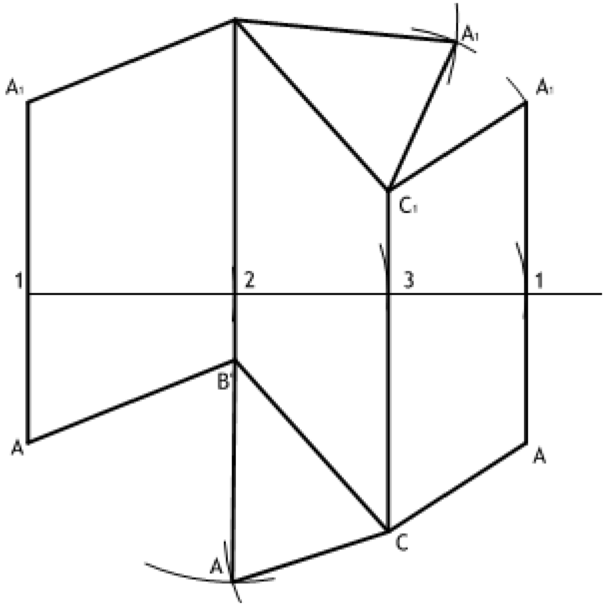


Figura 128. Desarrollo del prisma oblicuo

Para resolver con papel y tijeras

Problema 28. El rombo más grande

Tenemos un trozo de madera con forma de prisma rectangular recto, como el que se muestra en figura 129. Se nos pide cortarlo de modo que la sección plana producida, es decir la figura plana resultante del corte, sea un rombo de las mayores dimensiones posibles.

Los instrumentos de medición que disponemos no son muy confiables; no es posible conocer las medidas exactas; solo contamos con una hoja de papel que lo puede envolver por completo y unas tijeras.

Figura 129. Paralelepípedo de madera y un papel

Pautas para resolver

No disponiendo de medidas la única posibilidad que nos queda para fijar los puntos por donde debe pasar el serrucho es medir y marcar con el papel, doblando y plegando adecuadamente.

Tengamos en cuenta que el tamaño del rombo será proporcional al tamaño de sus diagonales. Se deduce entonces que la diagonal mayor del rombo coincidirá con una de las diagonales del paralelepípedo.

También habrá que tener en cuenta que la otra diagonal debe ser perpendicular a la primera y por supuesto sus extremos pertenecerán a aristas del paralelepípedo en puntos tales que resulten en lados iguales para el rombo.

Lo invito a que usted procure conseguir materiales apropiados para simular el problema e intente resolverlo.

Solución

Dependiendo de la posición del plano secante, la sección transversal de un prisma rectangular puede ser un polígono de tres a seis lados. Estamos interesados en que sea un rombo. Siempre se pueden conseguir rombos cortando adecuadamente un prisma rectangular. Existen infinitos rombos posibles. Nosotros buscamos el rombo más grande. Por lo tanto deberá tener su diagonal mayor coincidente con la diagonal del prisma. Por esa diagonal pasan infinitos planos pero solo algunos dan lugar a rombos. Veamos ahora como encontrarlos.

Método general para determinar una sección plana rómbica

Cortando el prisma rectangular con un plano oblicuo a las aristas y el elegido de modo tal que las distancias entre los puntos de intersección del plano secante con dos aristas consecutivas sean iguales se obtiene un rombo.

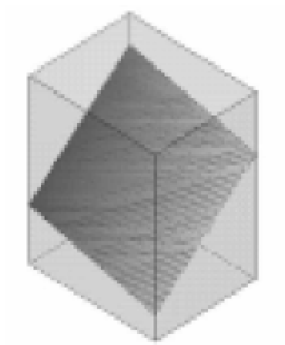
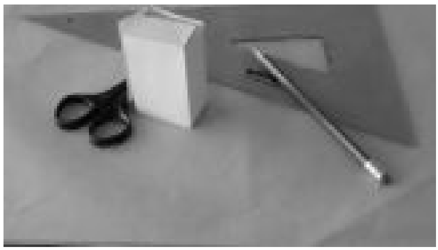


Figura 130. Rombo en prisma rectangular

Para maximizar el tamaño del rombo resultante, se debe pasar a través de los vértices opuestos del prisma.

La diagonal más larga del rombo será una diagonal del prisma. Los otros dos vértices del rombo serán puntos contenidos en aristas paralelas opuestas y equidistantes de los extremos de la diagonal del prisma. Nuestro problema consiste en determinar esos puntos.

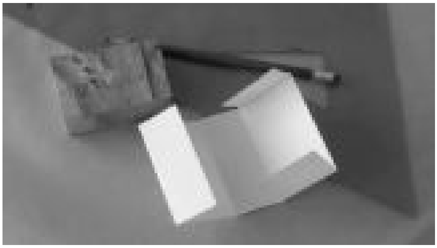
Al no conocer las medidas del trozo de madera no es posible resolver el problema mediante cálculo.



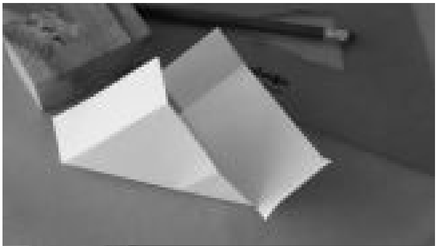
Aquí es donde nos resulta útil el papel que lo envuelve. Procedemos de la siguiente manera:

- Envolvemos la pieza de madera y marcamos sobre el papel las aristas.

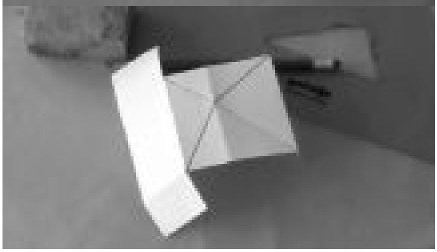
- Desplegamos el papel sobre un plano y tenemos lo que se llama desarrollo del prisma.



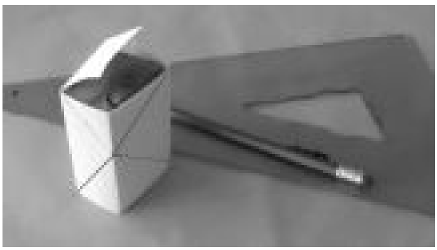
- Doblamos el papel haciendo coincidir los puntos que corresponden a la diagonal del prisma que van a ser la diagonal mayor del rombo y marcamos el pliegue.



- Los puntos de este último pliegue equidistan de los extremos de la diagonal mayor; por lo tanto…



- …su intersección con los pliegues representativos de las aristas señalan los puntos donde deben estar ubicados los extremos de la diagonal menor.



La distancia más corta entre dos puntos

Problema 29. Una araña en Keops

A la vuelta de su viaje a Egipto un amigo nos solicitó ayuda para construir una maqueta a escala de la Gran Pirámide de Keops.

Figura 131. La Gran Pirámide de Keops

La maqueta se hizo con cartón fino en escala 1:100. Es decir cada 100 metros del monumento, la maqueta tendría 100 cm. Las medidas reales de Keops son: base cuadrada de 230 metros y altura de la pirámide 146 metros.

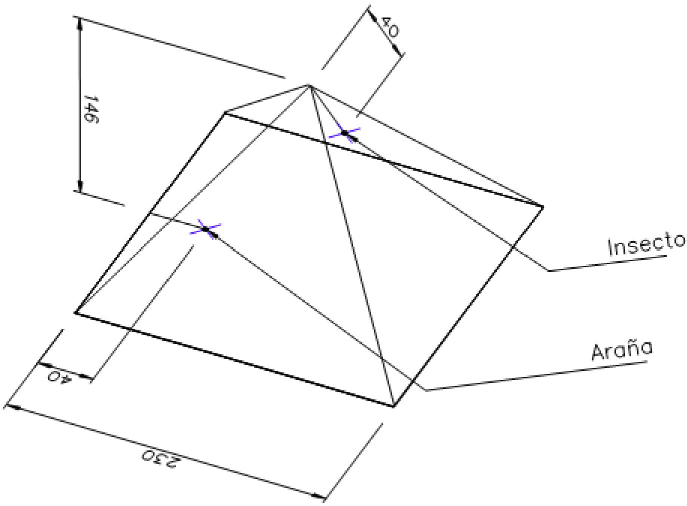


Figura 132. Esquema de medidas de la pirámide de Keops.

Las medidas resultantes fueron: lado de la base 2,30 metros y altura 1,46 metros. Es decir, numéricamente las mismas medidas pero, para la maqueta, tomadas en centímetros.

La maqueta estuvo varios días en exhibición lo que dio lugar a una curiosa historia de supervivencia. En su interior una araña tejió su tela en la cual quedó atrapado un insecto. La araña lo advirtió cuando estaba sobre la base de la pirámide, a 40 cm del punto medio de uno de sus lados. El insecto quedó atrapado contra la cara lateral, opuesta al lado cercano en que se encontraba la araña, a 40 cm de la cúspide y equidistante de ambas aristas.

El problema consisten en ayudar a la araña a alcanzar el insecto haciendo el recorrido más corto posible; para eso debemos resolver dos cuestiones, a saber: a/ por donde debe caminar y b/ la longitud del recorrido.

Pautas para resolver

La distancia más corta entre dos puntos es una línea recta. Pero como en este caso la araña debe hacer un recorrido por una superficie no plana habrá que realizar alguna clase de rectificación de la superficie para encontrar esa línea recta. Esto se consigue desarrollando la superficie lateral de la pirámide y considerando las diferentes ubicaciones que se puede dar a la base de la pirámide, para determinar la distancia más corta.

Resolución

En el desarrollo propuesto y con diferentes ubicaciones para la base de la pirámide podemos apreciar cual va a ser el camino más corto.

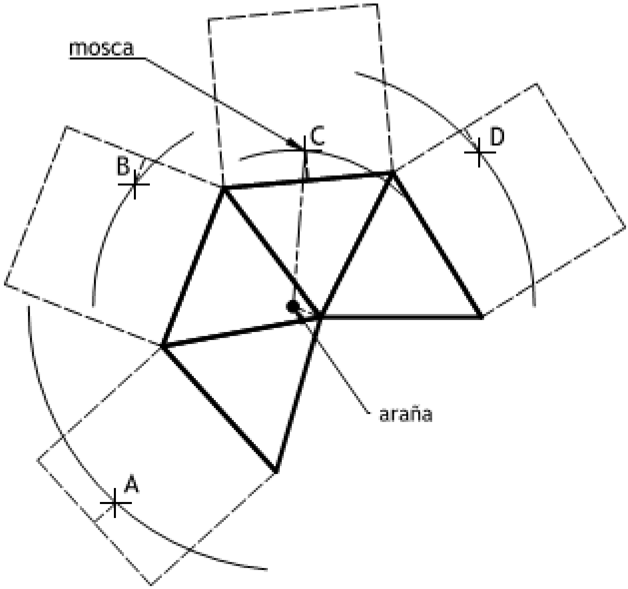


Figura 133. Despliegue de la superficie de la maqueta

Nos quedamos con la cara que ubica a la mosca en el punto C. Esto a su vez nos dice por cuál punto de las aristas debe pasar para conseguir el recorrido más corto.

Desarrollo inverso

Veamos ahora algunos problemas de este mismo dominio pero inversos a los habituales, es decir, dado un desarrollo encontrar y describir gráficamente el objeto implicado, o sea, reconstruir el cuerpo. Aquí van los problemas.

Problema 30. Volumen poliédrico

Preparamos tres cuadrados de 40 mm de lado y los dividimos con una línea que una los puntos medios de dos lados adyacentes como se ve en figura 134.

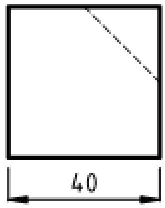


Figura 134. Forma a recortar

También recortamos un hexágono regular de lado igual a la línea de corte del cuadrado anterior, 28.3 mm.

Se colocan tres copias de la forma triangular en lados alternado de un hexágono regular y tres copias de la otra pieza en los lados restantes.

La forma resultante, mostrada en figura 135, se pliega dando lugar a un poliedro de 7 caras.

Se pregunta: ¿Cuál es el volumen del poliedro?

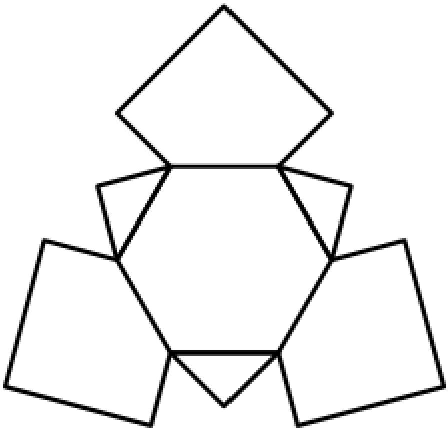


Figura 135. Desarrollo del volumen que se quiere conocer

Pautas para resolver

Si no imagina la forma resultante, construya el desarrollo propuesto e imagine cual sería la forma y tamaño de la maqueta resultante. En caso de ser necesario avance realizando el plegado que dará lugar al poliedro original. Llegado a este punto usted verá que el cálculo de volumen se puede realizar mentalmente.

Resolución

El plegado del desarrollo propuesto resulta en un volumen que observado con detenimiento resulta ser un cubo seccionado por un plano que pasa por los puntos medios de varias de sus aristas y divide al cubo en dos volúmenes iguales.

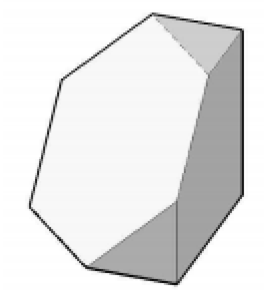


Figura 136. Volumen poliédrico

La pieza resultante se describe mediante sus vistas en la figura.

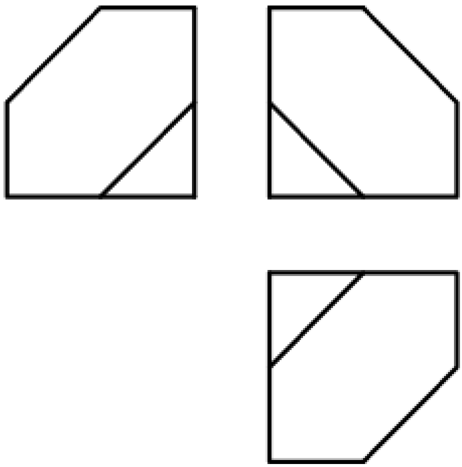


Figura 137. Vistas de la pieza resultante del plegado

En consecuencia el volumen será igual a:

$$V = (lado\ cubo)^3 \div 2 = 64000 \div 2 = 32000mm^3 = 32cm^3$$

Problema 31. Poliedro a partir de triángulo equilátero

Para comenzar con este grupo de problemas lo haremos con uno simple. Se da una pieza plana con forma de triángulo equilátero y se pide encontrar el poliedro que dio lugar a este desarrollo.

Pautas para resolver

Si usted ha visto o resuelto problemas de desarrollo de superficies previamente, con seguridad que en algún momento habrá visto un triángulo equilátero como solución.

Solución

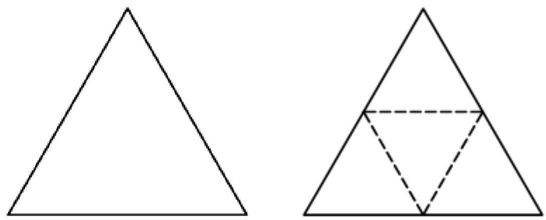


Figura 138. Triángulo equilátero y marcado para plegar

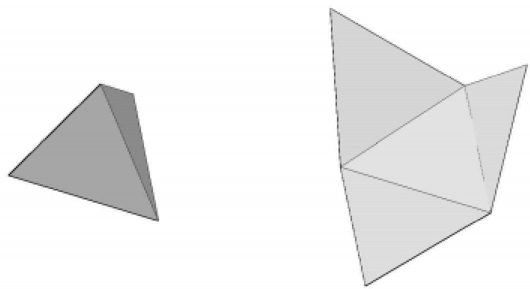


Figura 139. Tetraedro ya plegado y tetraedro en proceso

Problema 32. Superficie que pliega en un cubo

La figura 140 es el desarrollo de un poliedro que no se abrió por las aristas. Las aristas no están trazadas. Intentando volver al volumen original apreciamos las dificultades que se presentan cuando no se cumplen estos dos aspectos en un desarrollo de superficie.

¿Es posible armar un cubo a partir de este desarrollo?

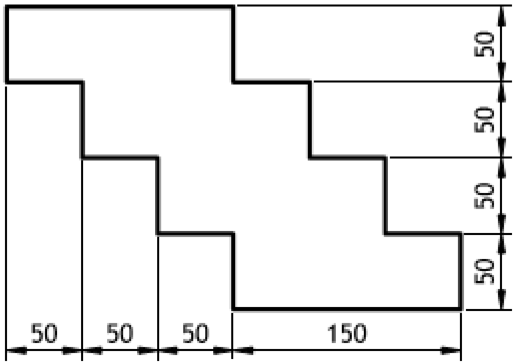


Figura 140. Desarrollo de superficie

Pautas para resolver

Un camino que aportará indicios acerca del volumen que buscamos es considerar el área de la forma dada y la longitud de aristas resultante.

Resolución

Área de la forma dada: 30000 mm^2. En consecuencia, cada cara del cubo tendrá una superficie de 5000 mm^2. Lo que implica una arista de aproximadamente 70,7 mm. Ahora el problema se ha transformado en acomodar las 12 aristas sobre la superficie dada, teniendo en cuenta la posición relativa que deber observar entre ellas.

Aquí caben algunas pruebas y tanteos. Se pueden acomodar tres caras completas en el desarrollo en coincidencia con algunos vértices de la figura. Este hecho de la coincidencia de vértices nos dice que vamos por buen camino. Finalmente se podrá encontrar la disposición de aristas mostrada en la figura 141.

Las partes restantes, no cubiertas por los cuadrados detectados, son mitades o cuartos de cuadrados de esa medida.

Verificamos que esas partes pueden unirse para componer las caras faltantes. Esto último se puede resolver trabajando con software CAD para simular el plegado o construir el modelo en cartulina y verificar que se arme el cubo.

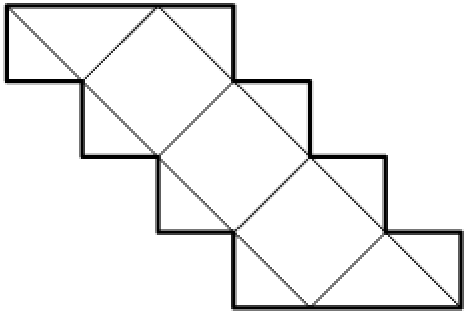


Figura 141. Trazado de aristas sobre la superficie provista

El plegado del desarrollo por las aristas encontradas, antes de realizar el último pliegue, se muestra en figura 142.

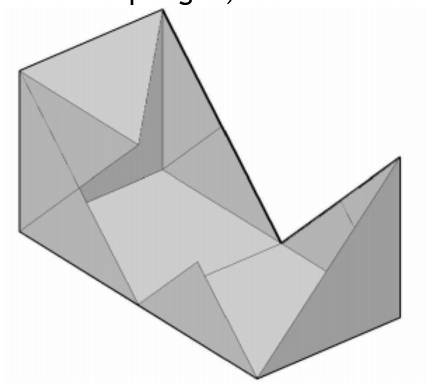


Figura 142. Desarrollo en proceso de plegado

Problema 33. Poliedro con un cuadrado

Después de la entrada en calor con el problema anterior pasamos a un problema un tanto más desafiante.

Supongamos la siguiente situación: nos piden confeccionar unos trofeos muy económicos y se quiere aprovechar la disponibilidad de unos recortes de chapa perfectamente cuadrados. La idea es confeccionar un poliedro. En el taller tenemos algunas restricciones de fabricación. Solamente disponemos de guillotinas y plegadoras de chapa. Las guillotinas hacen cortes y las plegadoras doblan la chapa. ¿Qué solución le podemos ofrecer?

Pautas para resolver

Tenemos que proponer cuales van a ser las aristas y trazarlas. Encontraremos varias soluciones posibles. La más simple es la que muestra el siguiente trazado que podremos plegar como muestra la figura 144.

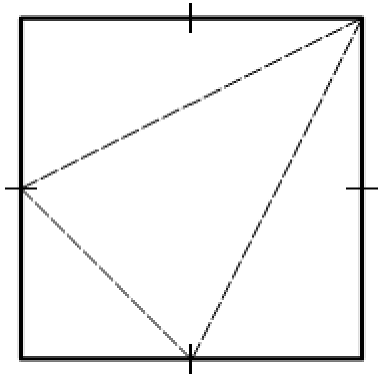


Figura 143. Un trazado para reconstruir un poliedro

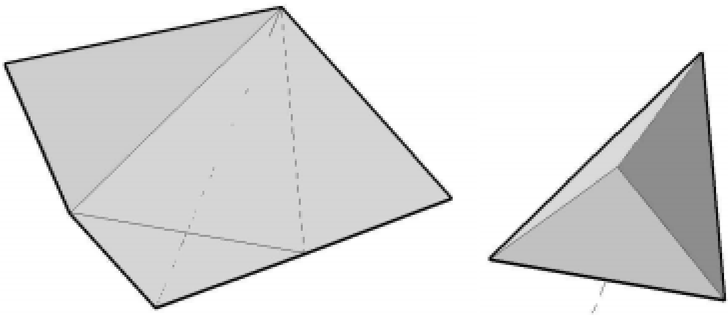


Figura 144. Proceso de plegado para llegar al poliedro

Como dijimos, no es la única solución.

Otra solución

Existen varias posibilidades, todas alrededor de la misma idea. Las figuras que siguen muestran cuales sería las líneas de plegado.

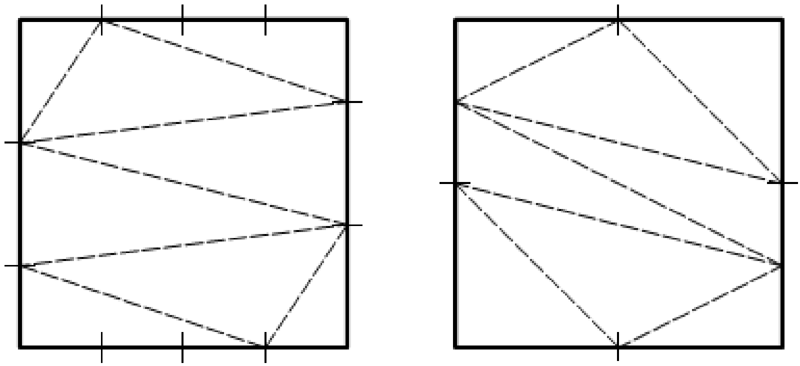


Figura 145. Plegados alternativos de un cuadrado

Elegimos este último esquema para conseguir un poliedro como el que se puede ver en vistas de figura 147.

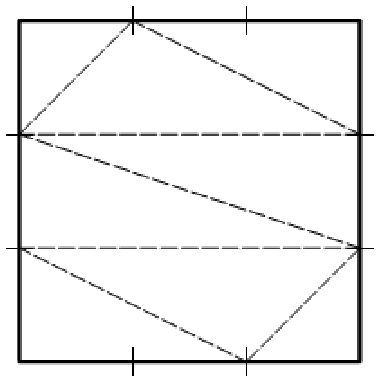


Figura 146. Otro plegado posible

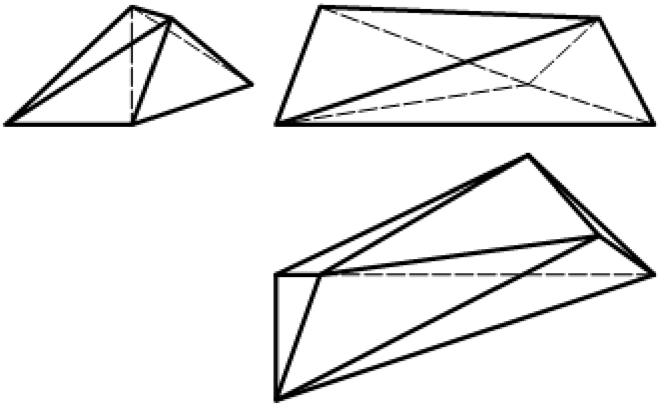


Figura 147. Vistas del poliedro resultante

La imagen ilustrativa de rayos-X ayudará a comprender la forma del poliedro.

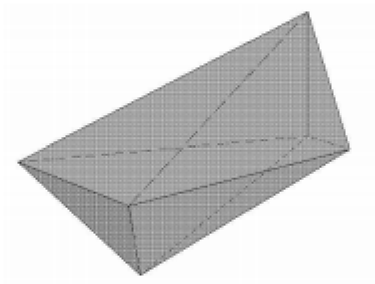


Figura 148. Ilustración con rayos-X del poliedro