Capítulo 5
¿Por qué proyecciones?

Justificaciones

Trabajar con proyecciones implica comprender geometría descriptiva; lo que a su vez nos demandará algún esfuerzo que por mínimo que sea es bastante natural la propensión a evitarlo. Es entendible entonces que si se pueden obtener proyecciones automáticamente a partir de modelos 3D entonces usted se pregunte ¿para que las estudiaremos? Pues bien, existen varios motivos:

- Interpretar un plano. Las vistas que se presentan en un plano son proyecciones. Es necesario entender las proyecciones para realizar una lectura correcta de esas vistas.
- Que las vistas se puedan generar automáticamente no quita que en alguna circunstancia sea necesario realizar al menos un croquis técnico; esto implica trazar proyecciones.
- Si se comete un error en el proceso de modelado – generación automática de vistas, conociendo de proyecciones estamos en condiciones de detectarlo y corregirlo.
- Adicionalmente se pueden presentar problemas cuya solución se vea notablemente simplificada con el concepto de proyecciones. Ejemplo de ello son las Elipses de Steiner.

Elipses de Steiner

El problema que sigue se debe a Jakob Steiner, destacado geómetra suizo (1796 - 1863), y es un excelente ejemplo de problema de difícil resolución analítica, pero que resulta notablemente fácil con un enfoque gráfico, utilizando el concepto de proyección.

Se da un triángulo y se desea calcular cuál sería el área mínima de la elipse circunscripta y el área máxima de la elipse inscrita en él.

Problema 24. Elipse circunscrita de Steiner

Dado un triángulo trazar la elipse circunscripta de área mínima y calcular el área de la misma. Planteado originalmente por Jacob Steiner, geómetra suizo del siglo XIX.

Se va a resolver para un triángulo de lados 5, 7 y 9 unidades, no obstante el procedimiento es aplicable a cualquier triángulo.

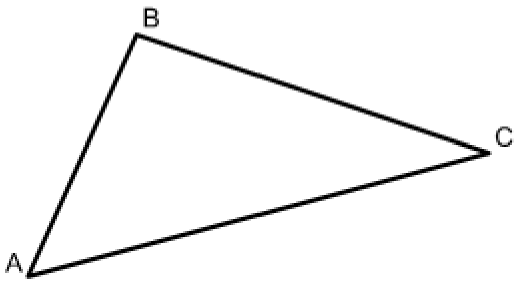

Figura 88. El triángulo que se da como dato

Pautas para resolver

Puestos ante el problema es posible que no sepamos cómo encararlo. Intentaremos resolverlo siguiendo las sugerencias generales para la resolución de problemas; pensamos en un problema similar a este como puede ser el Problema 14. Triángulo inscripto de área máxima.

Podemos vincular los dos problemas suponiendo que el triángulo propuesto y la elipse buscada son proyecciones de un triángulo equilátero y la circunferencia circunscripta de área mínima.

Como se vio en la sección de proyecciones, una figura contenida en un plano oblicuo al plano de proyección se proyecta como una figura similar y de superficie igual a la superficie de la figura original multiplicada por el coseno del ángulo comprendido entre el plano de la figura y el plano de proyección.

Por lo tanto, el problema se transforma en proyectar esa circunferencia con su triángulo equilátero inscripto de forma tal que la proyección del triángulo de como resultado el triángulo del enunciado.

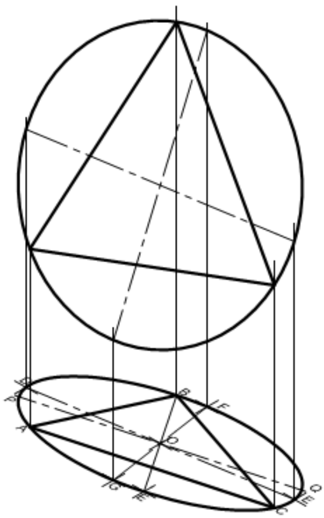

Figura 89. Ilustración de los elementos y su proyección

Analicemos el conjunto que imaginamos se está proyectando; ver figura 90.

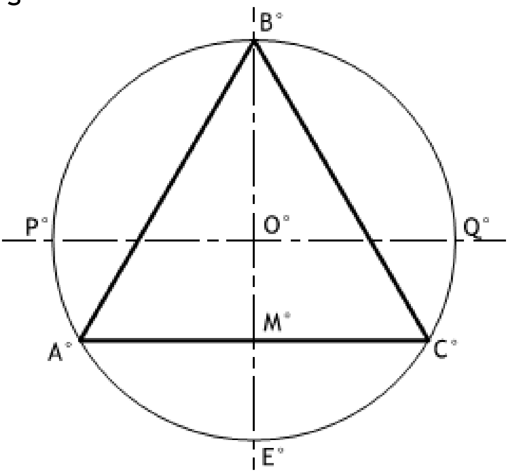

Figura 90. Triángulo equilátero inscripto en circunferencia

El punto *O°* es simultáneamente baricentro, incentro, circuncentro y ortocentro del triángulo equilátero *A°-B°-C°*.

Nos interesa particularmente que sea baricentro del triángulo equilátero pues las medianas del triángulo dado son proyecciones de las medianas del triángulo equilátero y por lo tanto la proyección del baricentro $O°$ coincidirá con el baricentro O del triángulo proyectado; y adicionalmente, será el centro de las elipses buscadas. En la figura que consideramos se proyecta tenemos que:

- B°E° es diámetro de la circunferencia y contiene a la altura del triángulo A°B°C°.
- B°O°es el radio de la circunferencia circunscripta y se lo puede ubicar inmediatamente en el triángulo dado; por lo que ya se tiene un diámetro de la elipse.
- P°Q°es diámetro de la circunferencia perpendicular a B°R°, por lo que al proyectarse resultará diámetro conjugado de B°R° en la elipse proyección.

Se tendrán entonces dos diámetros conjugados de la elipse con lo cual esta última queda definida.

Con este análisis comprobamos que tenemos los elementos necesarios para alcanzar una solución. Procedemos entonces a realizar los trazados necesarios.

Diámetros conjugados de la elipse proyección

Trazando las medianas del triángulo ABC queda determinado el baricentro **O**.

Proyectando el diámetro de la circunferencia B°E° tendremos un diámetro de la elipse; el centro de ésta es el baricentro del triángulo; para determinar el punto E hacemos OE igual a BO.

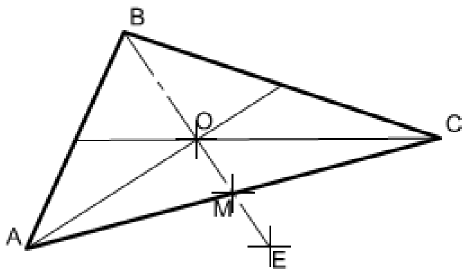

Figura 91. Determinación del baricentro y un diámetro.

Proyectando el diámetro P°Q° de la circunferencia, paralelo al lado A°C° y perpendicular al diámetro B°E°

tendremos PQ, diámetro de la elipse conjugado de BE. Para encontrar esta proyección tendremos en cuenta que segmentos paralelos en el espacio resultarán paralelos en sus proyecciones y sus longitudes se reducen en la misma proporción.

El diámetro conjugado de BE es la proyección de P°Q°, siendo P°Q° perpendicular a B°E°, paralelo a A°C° y pasando por O°.

Como el paralelismo entre rectas se conserva en las proyecciones (ver proyección de segmentos), el diámetro que buscamos estará sobre una recta **t** que pase por O y sea paralela al lado AC.

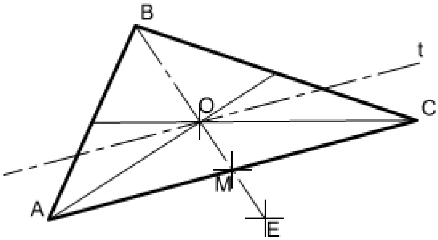

Figura 92. Determinación del diámetro BE

Para determinar la longitud de este diámetro debemos considerar que las rectas paralelas en el espacio, se proyectan paralelas y reducen su longitud en la misma proporción.

La longitud del diámetro PQ de la elipse se establecerá en relación con la longitud del lado AC ya que, al ser paralelos, las proyecciones conservan las proporciones existentes entre el lado del triángulo equilátero y el diámetro de la circunferencia circunscripta.

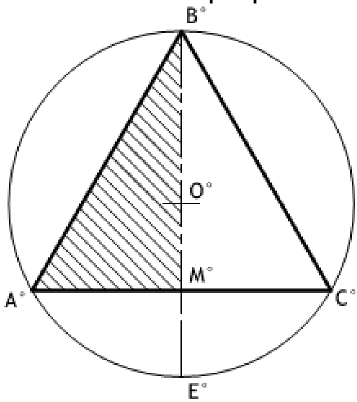

Figura 93. Relación circunferencia a triángulo equilátero

Para obtener la longitud del diámetro PQ construimos un triángulo equilátero de lado igual al AC; determinamos su circuncentro;

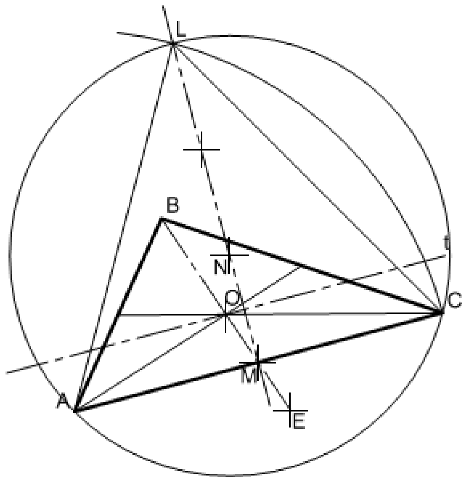

Figura 94. Reconstrucción del diámetro paralelo a AC

Trazamos la circunferencia circunscripta, cuyo diámetro tiene la longitud buscada, y aplicamos simétricamente sobre la recta **t**.

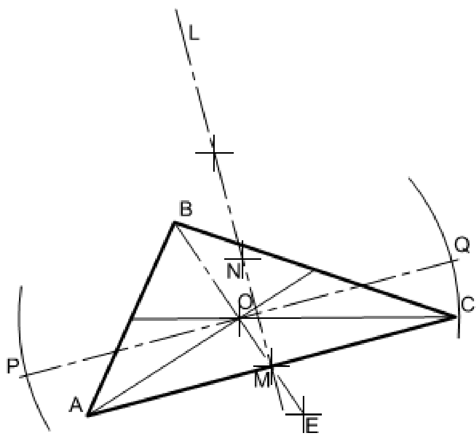

Figura 95. Aplicación del segundo diámetro conjugado

Con los diámetros conjugados de la elipse vamos a determinar los ejes principales. Utilizamos el método de Ritze.

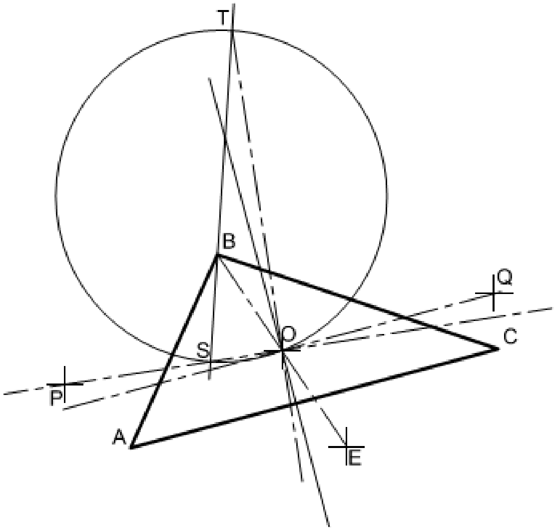

Figura 96. Determinación de ejes principales de la elipse

Corresponde comentar que con los diámetros conjugados se puede trazar la elipse. Sin embargo los ejes principales permiten realizar el trazado con comandos de software CAD y proveen un método adicional para calcular la superficie de la elipse.

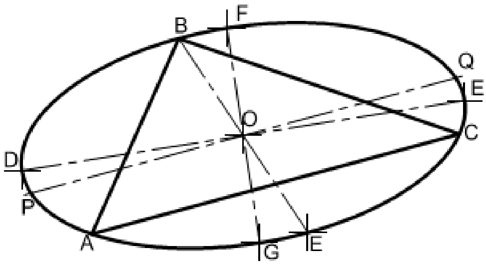

Figura 97. Elipse circunscripta de mínima área

Área del triángulo.

Haremos el cálculo de dos formas:

- mediante la fórmula de Herón y
- tomando datos del dibujo con CAD

Fórmula de Herón para el cálculo

$$Área = \sqrt{s\,(s-a)\,(s-b)\,(s-c)}$$

Donde s es el semiperímetro del triángulo:

$$s = \frac{1}{2}(\,a + b + c\,)$$

$$s = \frac{1}{2}(\,5 + 6 + 7\,) = 9$$

Y el área del triángulo será:

$$Área = \sqrt{9 \cdot (9-5) \cdot (9-6) \cdot (9-7)} = 14.697$$

Área de la elipse

$$Area\ Elipse = \pi \cdot a \cdot b$$

Donde a y b son los semiejes de la elipse. En nuestro caso las longitudes de estos semiejes se extraen del dibujo original y son: 37.0643 y 17.7204

Con los valores anteriores se puede calcular la superficie de la elipse.

$$Area\ Elipse = \pi \cdot 37.0643 \cdot 17.7204 = 20.6338$$

Verificamos el resultado tomando datos del dibujo CAD y comprobamos que el área es 20.6338