Capítulo 4
Los objetos tridimensionales

Uno de los requerimientos que se le planteó a la representación gráfica fue la necesidad de explicar en planos, es decir en dos dimensiones, la forma de objetos tridimensionales. La respuesta fue la creación de diferentes sistemas de representación.

La pregunta que surge de inmediato es ¿por qué varios sistemas? ¿No será posible un sistema lo suficientemente bueno como para resolver todos los problemas? Veamos la situación. Vamos a representar en dos dimensiones objetos que tienen tres dimensiones. Esto impone algunas restricciones a la representación y el resultado es que no se puede conseguir todo lo bueno en un mismo sistema. El sistema que es bueno para una finalidad tiene falencias para otro objetivo.

Representar 3D en el plano

Supongamos tener un punto fijo en el espacio, una superficie plana y una recta que pasa por el punto dado. Llamaremos plano de proyección a la superficie plana y rayo proyectante a la recta que pasa por el punto. La intersección del rayo proyectante con el plano de proyección es la proyección del punto dado.

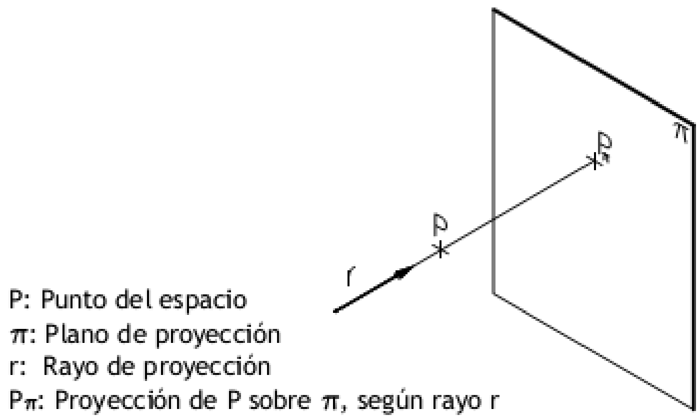

Figura 63. Concepto de proyección

Llamaremos proyección de una figura a la figura resultante de proyectar los puntos de la figura dada sobre un plano. Según la dirección que lleven los rayos proyectantes con respecto al plano de proyección se tendrán diferentes sistemas.

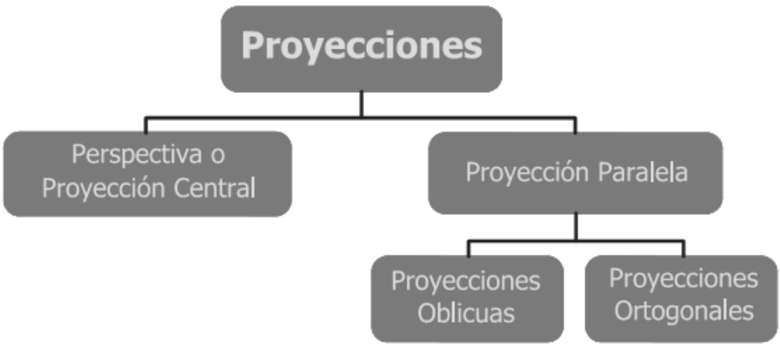

Figura 64. Esquema de los diferentes sistemas de proyección

Distinguiremos según los rayos proyectantes partan de un punto, proyección central, o sean paralelos a una dirección determinada, proyección paralela. A su vez en las proyecciones paralelas distinguimos según que la dirección de proyección sea oblicua o perpendicular respecto al plano de proyección; tendremos proyecciones oblicuas o proyecciones ortogonales respectivamente.

Proyección central

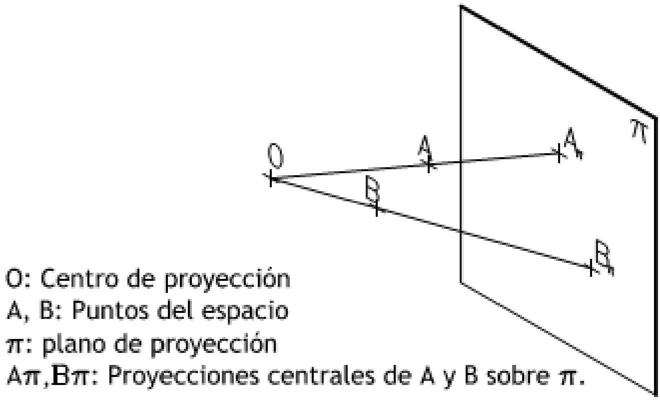

Figura 65. Esquema de la proyección central

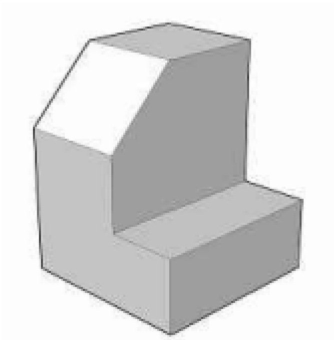

Figura 66. Resultado de una proyección central

Proyección paralela oblicua

En el sistema de proyección oblicua los rayos proyectantes son paralelos entre sí y oblicuos al plano de proyección. La proyección de un punto se obtiene como intersección de un rayo proyectante con el plano de proyección.

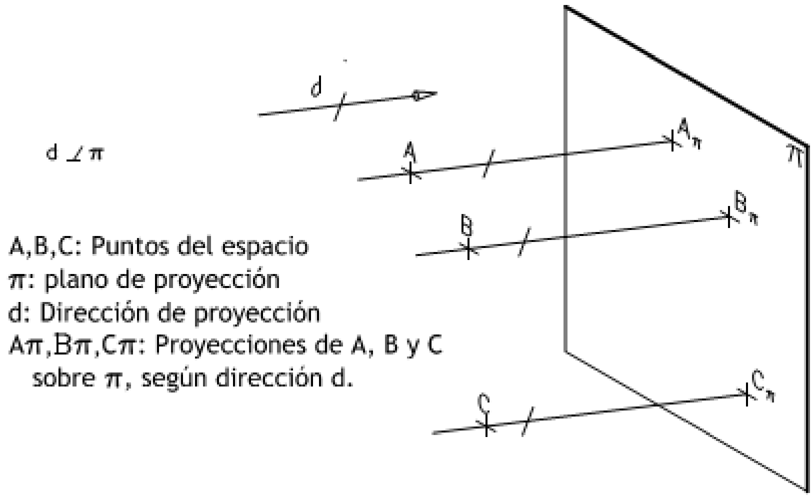

Figura 67. Proyección paralela oblicua

Se consigue un resultado como el mostrado en la figura 68. Este ejemplo particular se conoce como perspectiva caballera.

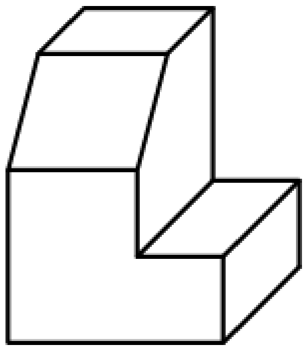

Figura 68. Ejemplo de proyección oblicua

Proyección paralela ortogonal

En el sistema de proyección paralela ortogonal los rayos proyectantes son paralelos entre sí y perpendiculares al plano de proyección. La proyección de un punto se obtiene como intersección del rayo proyectante que pasa por el punto con el plano de proyección.

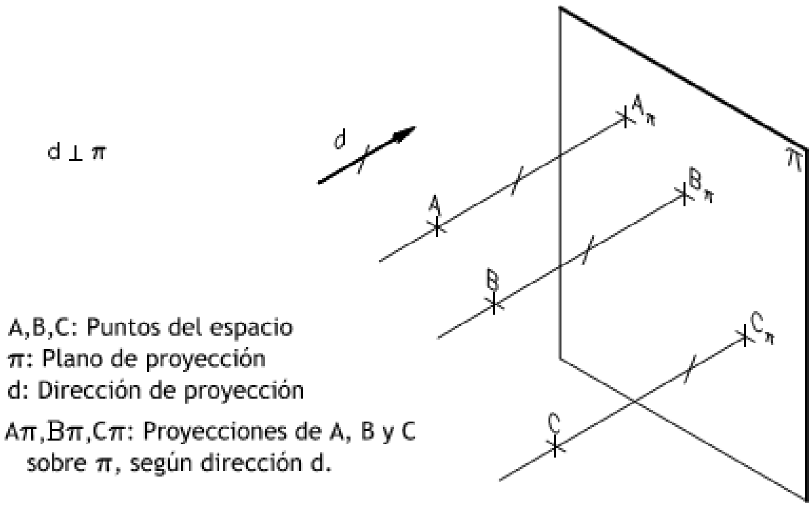

Figura 69. Proyección paralela ortogonal

Esta forma de proyección da lugar al sistema diédrico multiplanar que da fundamento a la confección de planos y a las axonometrías ortogonales.

La descripción completa de la forma de un objeto requiere medir y aplicar medidas. Para conseguirlo las caras principales del objeto a representar se colocan de frente al observador o, lo que es lo mismo, paralelas al plano de proyección. En estas condiciones no será posible apreciar la dimensión perpendicular a la cara representada. Es por esto que para conseguir la representación completa del objeto se utiliza un sistema de planos de proyección mutuamente perpendiculares entre sí al que llamamos sistema diédrico multiplanar. De esta manera obtenemos las vistas del objeto.

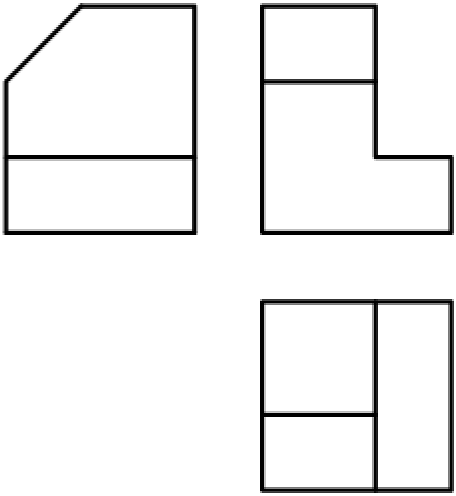

Figura 70. Vistas de un objeto

Si ubicamos el objeto a representar de manera tal que se puedan apreciar simultáneamente tres caras que sean perpendiculares entre sí, al proyectarlo conseguiremos un dibujo ilustrativo conocido como axonometría. Desarrollaremos una aproximación a los mismos.

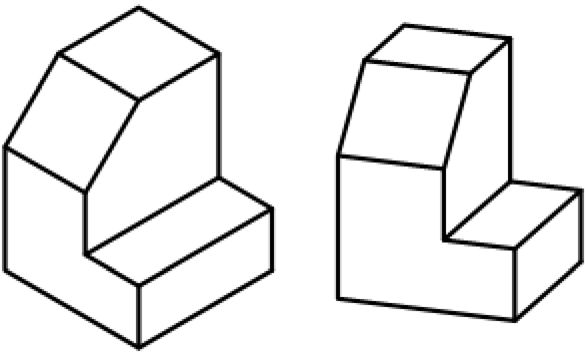

Figura 71. Axonometrías

Desarrollaremos una aproximación a estos sistemas de representación.

Proyección de segmentos

Un segmento de recta se proyecta como segmento cuya longitud depende de la posición que tenga respecto del plano de proyección.

Posición del segmento respecto del plano de proyección	Resultado obtenido
Paralelo	Segmento de igual longitud al segmento dado; en verdadera magnitud.
Oblicuo	Segmento de menor longitud que el segmento dado.
Perpendicular	Un punto

Segmentos paralelos en el espacio resultaran paralelos en sus proyecciones y sus longitudes se reducen en la misma proporción.

Ángulo recta plano

Se determina el ángulo formado por una recta con un plano midiendo el ángulo formado por la recta con su proyección ortogonal sobre el plano. En la figura que sigue mostramos que se puede llegar al mismo resultado midiendo el ángulo formado por el segmento dado con una paralela al plano que pase por uno de sus extremos.

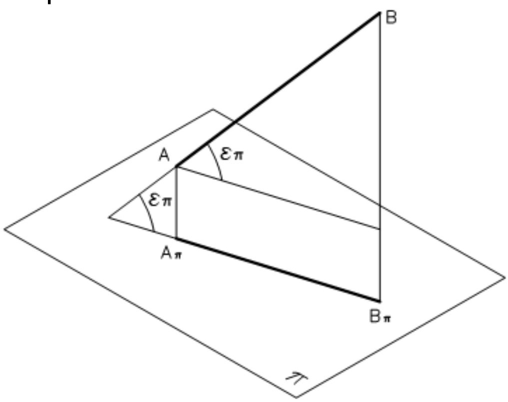

Figura 72. Medición del ángulo recta plano

Proyección de una figura plana

¿Qué sucede cuando proyectamos una figura plana?

Según la posición que tenga el plano al que pertenece la figura dada con respecto al plano de proyección se tendrá como resultado uno de los siguientes:

Posición relativa del plano dado respecto del plano de proyección	Resultado obtenido
Paralelo	Figura igual a la figura dada
Oblicuo	Figura de la misma configuración pero menor superficie
Perpendicular	Una línea

Área de figura plana proyectada

Una figura contenida en un plano oblicuo al plano de proyección se proyecta como una figura similar y de área igual al área de la figura original multiplicada por el coseno del ángulo comprendido entre el plano de la figura y el plano de proyección.

Para demostrarlo consideremos el diedro formado por el plano que contiene a la figura plana y el plano de proyección. Comenzaremos demostrando para un triángulo que tenga un lado paralelo a la arista del diedro formado por el plano dado y el plano de proyección; la altura del triángulo se proyecta con una medida igual a la altura original multiplicada por el coseno del ángulo diedro.

Si el triángulo no tiene ningún lado paralelo a la arista del diedro, lo dividimos en dos triángulos que sí cumplan esa condición. Podemos extender el razonamiento para toda figura poligonal; bastará descomponerla en triángulos para demostrar. Con lo que podemos afirmar que cualquier polígono contenido en un plano oblicuo se proyecta como una figura de la misma configuración y cuya superficie es igual a la superficie del polígono original multiplicada por el coseno del ángulo comprendido.

Para completar ideas consideremos una figura plana de contornos curvos. Podemos visualizar en forma intuitiva, aunque no rigurosa, que la figura puede ser aproximada por un polígono de lados tan pequeños como se quiera y en el límite, esa figura plana de contornos curvos tiene un área igual al área del polígono de lados muy pequeños. Por extensión, entonces, el área de la figura proyectada será igual al área de la figura original multiplicada por el coseno del ángulo diedro.

Generación de proyecciones

La generación de las proyecciones de objetos con la finalidad de confeccionar un plano u obtener un dibujo ilustrativo se basa, tradicionalmente, en la geometría descriptiva y desde comienzo de este siglo en los sistemas de modelado tridimensional.

Direcciones del espacio: coordenadas

Supongamos vivir en un barrio de zona rural, donde las calles no están identificadas. Para que alguien encuentre nuestra casa habrá que orientarlo de alguna forma, por ejemplo: suministrándole las coordenadas para colocar en un GPS o haciendo un planito de la zona, es decir una representación gráfica.

De la misma forma, cuando se quiera ubicar algún elemento geométrico en el plano o en el espacio debemos suministrar un conjunto de datos que llamaremos coordenadas. Los datos suministrados se aplican considerando una terna de ejes de referencia XYZ. Los ejes coordenados son perpendiculares entre sí y se disponen siguiendo lo que llamamos la ‘regla de la mano derecha’; ésta dice que cuando el pulgar de esa mano apunta hacia donde crecen los valores del eje X, el dedo índice apunta hacia donde crecen los valores del eje ‘Y’, el dedo medio apuntará en la dirección positiva del eje ‘Z’.

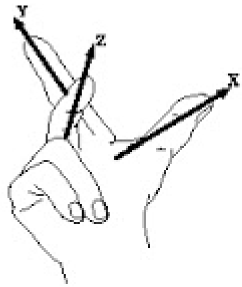

Figura 73. Regla de la mano derecha

Disponemos de tres sistemas de coordenadas: Coordenadas cartesianas, cilíndricas y esféricas.

Coordenadas Cartesianas

Las coordenadas cartesianas especifican la posición de un punto mediante las distancias paralelas a los ejes coordenados. Un ejemplo: en la figura siguiente se ha representado el punto de coordenadas (4, 3, 5)

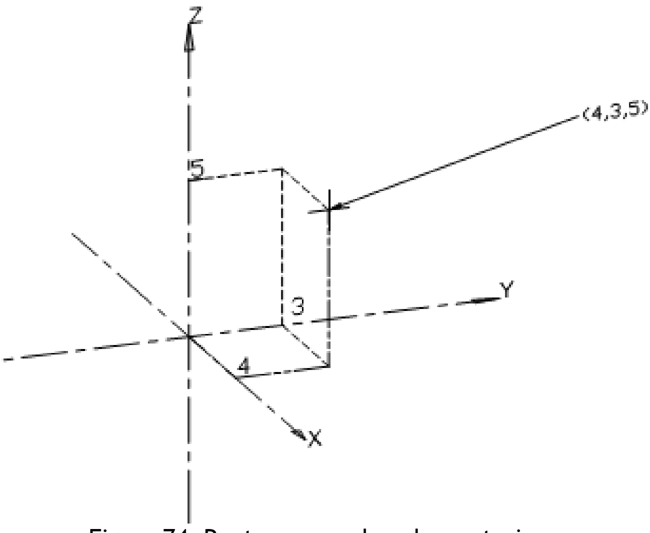

Figura 74. Punto en coordenadas cartesianas

Podemos pensar que para ubicar el punto procedemos de la siguiente forma:

- A partir del origen de coordenadas, punto (0,0,0) nos desplazamos a lo largo del eje ‘X’ según indica la primera coordenada, llegando al punto (4,0,0)
- Desde el punto alcanzado nos desplazamos a lo largo del eje ‘Y’ según indica la segunda coordenada, llegando al punto (4,3,0)
- Finalmente nos desplazamos paralelamente al eje ‘Z’ según indica la tercera coordenada, alcanzando el punto especificado como (4,3,5)

Las coordenadas cartesianas permiten trabajar en el plano XY especificando los primeros dos parámetros.

Coordenadas Cilíndricas

Las coordenadas cilíndricas especifican la posición de un punto mediante una distancia al origen de coordenadas, un ángulo en el plano XY y una distancia paralela al eje Z.

En representación gráfica cuando una coordenada toma valor angular, utilizaremos un corchete angular como separador de parámetros. Un ejemplo: en la figura siguiente se ha representado el punto de coordenadas (6<30°,5)

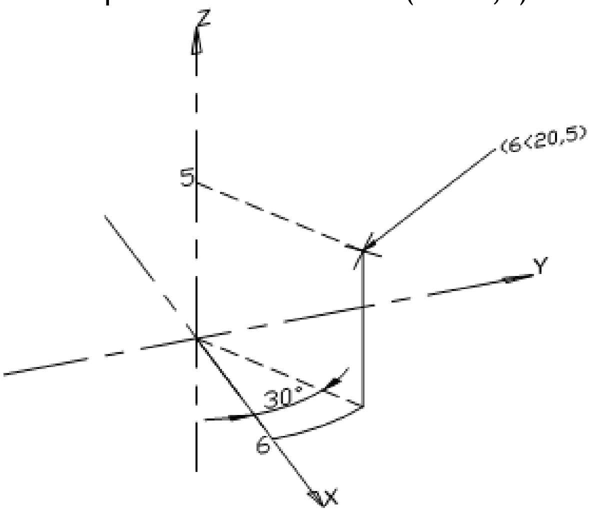

Figura 75. Punto en coordenadas cilíndricas

Para ubicar el punto especificado procedemos de la siguiente forma:

- A partir del origen de coordenadas, punto (0,0,0) nos desplazamos a lo largo del eje 'X' según indica la primera coordenada, llegando al punto (6,0,0)
- Desde el punto alcanzado giramos alrededor del origen de coordenadas, manteniéndonos en el plano XY, un ángulo igual al valor de la segunda coordenada, llegando al punto (6<30°)
- Finalmente nos desplazamos paralelamente al eje 'Z' según indica la tercera coordenada, alcanzando el punto especificado como (6<30°,5)

El nombre de coordenadas cilíndricas se debe a que una vez especificado el valor de la primera coordenada el punto que se especifica pertenecerá indefectiblemente a una superficie cilíndrica de radio igual al valor de la primera coordenada.

Las coordenadas cilíndricas permiten trabajar en el plano XY especificando los primeros dos parámetros; en este caso se las conoce como coordenadas polares.

Coordenadas esféricas

Las coordenadas esféricas especifican una ubicación mediante una distancia R a partir del origen de coordenadas, un ángulo α desde el eje X en el plano XY y un ángulo β desde el plano XY.

Una vez definido el valor de la primera coordenada el punto que se especifica pertenecerá indefectiblemente a una superficie esférica de radio igual al valor de la primera coordenada.

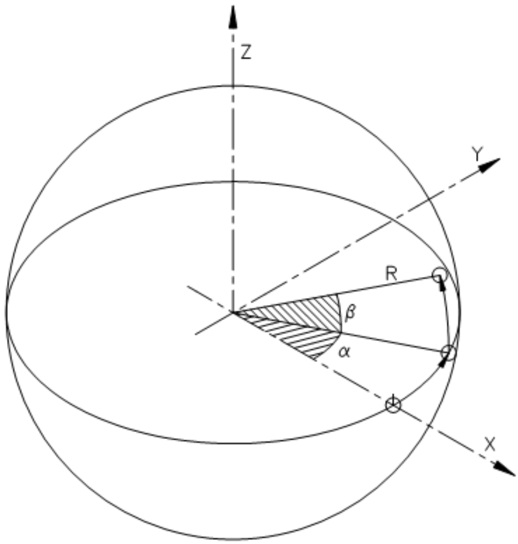

Figura 76. Coordenadas esféricas

Las coordenadas esféricas, al igual que las coordenadas cilíndricas, permiten trabajar en el plano XY especificando los primeros dos parámetros; se tienen entonces coordenadas polares.

De Coordenadas Esféricas a Coordenadas Geográficas

Las coordenadas geográficas son un sistema de referencia que utiliza dos coordenadas angulares para especificar un punto de la superficie terrestre. Estas dos coordenadas angulares forman parte de un sistema de coordenadas esféricas cuyo origen coincide con el centro de la tierra. La distancia que se especifica en las coordenadas esféricas en este caso no es necesaria porque se entiende que el punto estará sobre la superficie terrestre.

El eje de rotación terrestre coincide con el eje 'Z' del sistema de coordenadas.

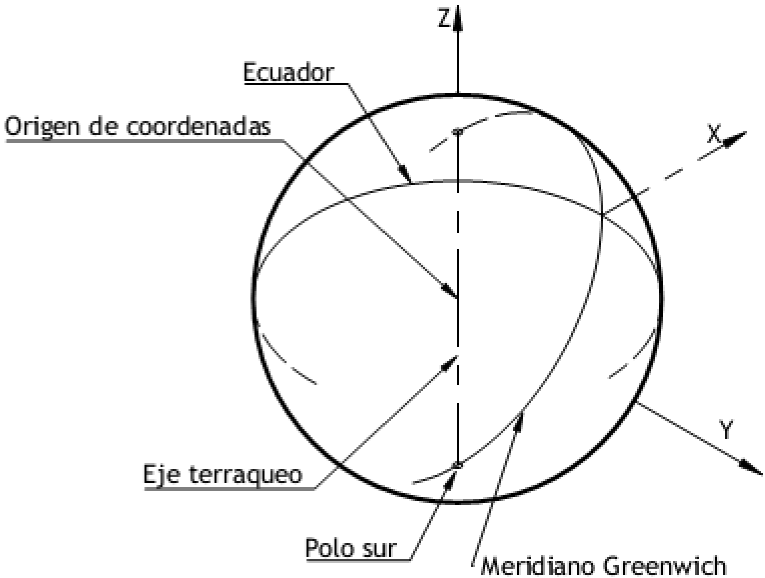

Figura 77. Sistema de Coordenadas Geográficas

Paralelos

Se denominan paralelos a las circunferencias resultantes de la intersección de la superficie terrestre con planos perpendiculares al eje terrestre.

Para alcanzar cualquier punto perteneciente a un paralelo habrá que girar igual ángulo desde el plano 'XY'.

La intersección del plano XY con la superficie terrestre da lugar a la circunferencia de Ecuador. Es el paralelo 0°.

El ángulo correspondiente a un paralelo siempre tiene un valor comprendido entre 0° y 90°. 0° corresponde al Ecuador. 90° corresponde a los polos. A los puntos comprendidos entre el Ecuador y el Polo Norte se les asigna latitud norte o se pueden especificar con valores positivos. A los puntos comprendidos entre el Ecuador y el Polo Sur se les asigna latitud sur o se pueden especificar con valores negativos.

Meridianos

Los meridianos son semicircunferencias con extremos en los polos norte y sur.

Para alcanzar cualquier punto perteneciente a un meridiano habrá que comenzar por girar el ángulo indicado en el plano 'XY'.

El eje 'X', a partir del cual se miden los giros en el plano 'XY' pasa por un meridiano particular identificado como Meridiano de Greenwich.

Los ángulos correspondientes a un meridiano pueden tomar valores comprendidos entre 0° y 180°. Siguiendo la regla de la mano derecha, observamos el giro desde el lado positivo del eje 'Z' y se les asigna longitud Este o positiva a los puntos encontrados girando en sentido anti-horario. A los puntos encontrados cuando se realiza el giro horario se les asigna longitud Oeste o negativa.

Problemas

A continuación presentamos problemas vinculados a la representación de objetos tridimensionales.

Problema 19. Minimizar la suma de distancias

Del libro "Geometría Analítica con Software", Katz R., Sabatinelli P. extraemos un problema que sirve para ilustrar como la solución de un problema del mismo tipo pero más simple nos ayuda a resolver.

Hallar las coordenadas de un punto P, del plano de ecuación $2x - 3y + 3z - 17 = 0$, tal que la suma de las distancias a los puntos A (3,-4,7) y B (5,-14,17) sea mínima.

Pautas para resolver

Llamando α al plano definido por la ecuación dada analizamos los casos posibles.

- Los dos puntos pertenecen al plano alfa. Cualquier punto del segmento que une los puntos dados sería solución.

- Uno de los puntos pertenece al Plano α. El punto dado, A ó B, que pertenece al plano α, es solución.
- Los puntos dados están en distintos semiespacios respecto del plano α. Como la distancia más corta entre dos puntos es la línea recta, entonces, la intersección del segmento A-B con el plano α será el punto P buscado ya que desde cualquier otro punto distinto de P que tomemos la suma de sus distancia a los puntos dados será mayor que la distancia entre A y B.
- Los puntos dados están en el mismo semiespacio respecto del plano α. Cuando los puntos están en el mismo semiespacio respecto del plano α tenemos una situación similar a la del Problema 9. pero en este caso en el espacio. La estrategia sería entonces considerar uno de los puntos dados y el simétrico del otro punto respecto del plano α. La solución es similar a la del caso anterior. Y como la distancia desde el punto buscado P al simétrico es igual a la distancia de P al punto dado original ya disponemos de un método para encontrar el punto P.

Resolución

En el libro citado el problema se resuelve analíticamente. Nosotros lo vamos a resolver gráficamente utilizando software CAD 3D del que extraemos algunas imágenes para ilustrar el proceso.

Ubicamos los puntos dados A y B por sus coordenadas cartesianas. Seguidamente ubicaremos tres puntos del plano dado. Elegimos los puntos del plano pertenecientes a los ejes coordenados.

```
X= 8.5000  Y= 0.0000  Z= 0.0000
X= 0.0000  Y= 0.0000  Z= 5.6667
X= 0.0000  Y=-5.6667  Z= 0.0000
```

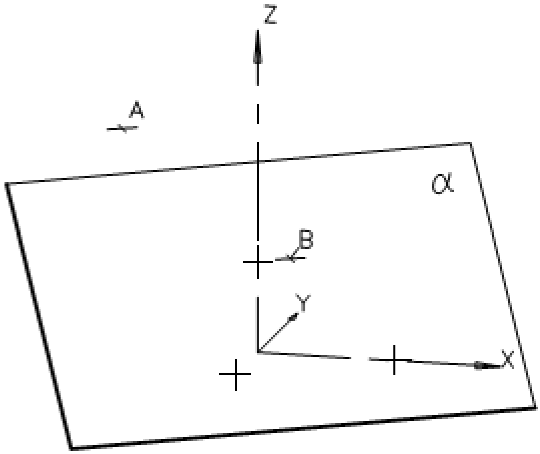

Figura 78. Datos para minimizar la suma de distancias

La figura 78 muestra los datos del problema. Seguidamente adoptamos un nuevo Sistema de Coordenadas Personales (SCP) para que α sea plano de trabajo. Determinamos la intersección de un segmento A-B o su prolongación con el plano α. Este paso nos servirá para determinar en qué caso estamos. Si la intersección está en el segmento A-B estamos en el tercer caso y ya tenemos la solución; caso contrario estamos en el cuarto caso. La intersección buscada se encuentra afuera del segmento A-B, cosa que verificamos por simple observación.

Determinamos el simétrico de uno de los puntos dados respecto del plano α, por ejemplo A al que llamamos A1. Ver figura 79.

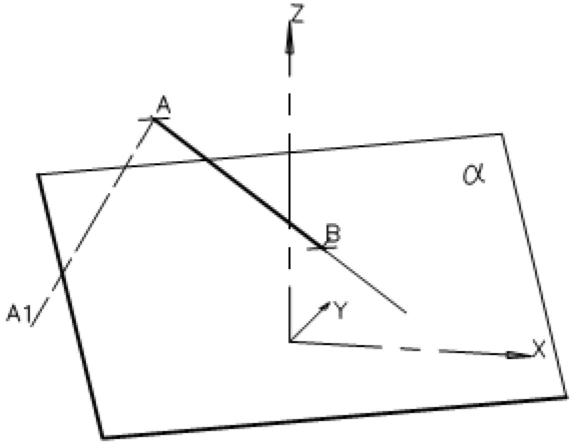

Figura 79. Determinación simétrico de A

Trazamos el segmento A1-B y determinamos su intersección con el plano α. Este será el punto buscado P. Figura 80.

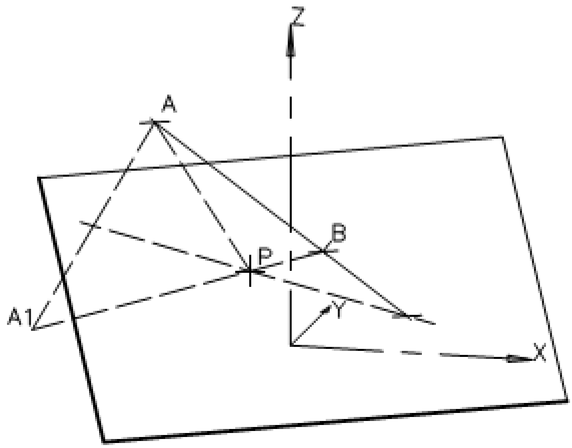

Figura 80. P minimiza la suma de distancias

Coordenadas de P:

$$P(-2.000, -2.000,5.000)$$

Problema 20. Cuatro ejércitos en el mundo

Supongamos por un momento que en el mundo existen cuatro ejércitos muy beligerantes que se aborrecen mutuamente. Para reducir la posibilidad de conflictos armados una organización mundial de gran ascendiente decide asignarles algún lugar del planeta de forma tal que queden con la mayor separación posible entre ellos. A uno de ellos le asignan el polo sur. A un segundo ejército le asignan un lugar sobre el meridiano de Greenwich cuyo paralelo habrá que determinar. ¿Cómo deberían ubicarse los dos ejércitos restantes?

Simplificación: asumiremos que el mundo es una esfera perfecta. Para especificar la posición de cada ejército lo haremos mediante longitud y latitud.

Pautas para resolver

Sigamos las sugerencias generales para resolver un problema; tratemos de resolver un problema similar pero más fácil, por ejemplo

Dos ejércitos

¿Cómo se resolvería el problema si fuesen dos ejércitos? La respuesta evidente es colocar el segundo ejército en el polo norte.

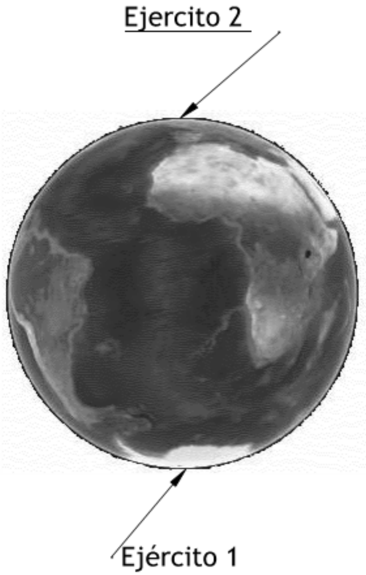

Figura 81. Ubicación para dos ejércitos

Tres ejércitos

¿Y si los ejércitos fuesen tres? Podemos considerar a la posición de los ejércitos como puntos sobre la superficie esférica. Tres puntos determinan un plano. Los puntos comunes a un plano y una superficie esférica dan lugar a una circunferencia. Tres puntos tendrán máxima separación cuando ocupen los vértices de un triángulo equilátero inscripto en la circunferencia. Observemos que los puntos guardan entre sí la misma distancia. Así es que se ubicará un ejército en el polo sur; un segundo ejército en 0° longitud, 30° latitud norte, o sea en el desierto de Sahara y finalmente el tercer ejército en 180° longitud, 30° latitud norte, un islote de las Islas Midway.

Pautas adicionales para resolver

Se complica un poco la resolución cuando nos planteamos el problema con cuatro ejércitos porque en este caso inevitablemente los cuatro puntos buscados no serán coplanarios.

Dejemos de lado, por un momento, la superficie esférica del globo terráqueo. Con la idea de ocupar el menor volumen posible nos preguntamos ¿Cómo se deben ubicar cuatro puntos para que estén todos a la misma distancia uno de otro? La respuesta la dan los cuatro vértices de un tetraedro regular.

Aplicado a nuestro problema debemos conseguir un tetraedro regular inscripto en una esfera.

Resolución

Ya tenemos el plan para resolver:

- modelamos un tetraedro regular; no es de importancia la medida porque vamos medir ángulos;
- le circunscribimos una esfera, el centro de la esfera coincidirá con el centro del tetraedro y finalmente
- medimos las coordenadas de los vértices.

La implementación del plan se puede desarrollar con software de modelado tridimensional.

En definitiva la solución para nuestro problema será asignar a los ejércitos las siguientes ubicaciones:

- Polo sur,
- 0° (meridiano de Greenwich); 19°28'16" latitud norte,
- 60° longitud oeste; 19°28'16" latitud norte y
- 60° longitud este; 19°28'16" latitud norte

La menor distancia entre ejércitos conseguida abarca un ángulo de 109°28'16", o sea aproximadamente 12163 km.

Problema 21. Cinco ejércitos en el mundo

Vamos a extender el problema anterior a una imaginaria situación más grave que la anterior. En el mundo existen cinco ejércitos muy beligerantes que se aborrecen mutuamente. Que ubicación habría que darles para que queden con la mayor separación posible entre ellos y reducir así la posibilidad de conflictos armados.

Se debe comenzar asignando a uno de ellos el polo sur. A un segundo ejército se le asignará un lugar sobre el meridiano de Greenwich cuyo paralelo habrá que determinar. ¿Cómo deberían ubicarse los tres ejércitos restantes?

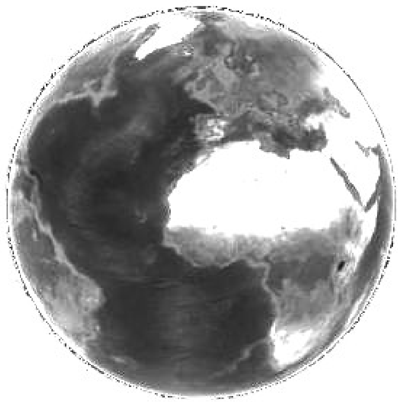

Figura 82. Ubicar cinco ejércitos enemigos en el mundo

Pautas para resolver

Vimos anteriormente como resolver problemas similares aunque con menor cantidad de ejércitos (puntos). Se identificó un concepto del cual podemos inferir que los vértices de un poliedro regular constituirían los puntos buscados. Esto nos daría soluciones para los casos de:

- Seis puntos: Octaedro regular
- Ocho puntos: Hexaedro regular
- Doce puntos: Icosaedro regular
- Veinte puntos: Dodecaedro regular

¿Cuál sería la situación si quitamos un punto a los seis que se corresponden con los vértices de un octaedro regular?

Resolución

Ubicamos un octaedro regular inscripto en la superficie del globo terráqueo con un vértice en el Polo Sur (requerido) y otro en el Polo Norte. Los cuatro vértices restantes se encontrarán en el Ecuador.

Quitamos uno de los vértices del Ecuador y solamente por simetría redistribuimos los restantes los cuales quedarán con una distribución similar a la del problema de los tres ejércitos.

La menor distancia entre ejércitos conseguida es la mitad del meridiano terrestre. En definitiva la solución para nuestro problema será asignarle a los ejércitos las siguientes ubicaciones:

- Polo Sur,
- 0° (meridiano de Greenwich); 0°0'0" latitud norte,
- 60° longitud oeste; 0°0'0" latitud norte, y
- 60° longitud este; 0°0'0" latitud norte,
- Polo Norte

Problema 22. De Rosario a las Malvinas

Frente al Monumento a la Bandera en Rosario hay una placa que indica la distancia desde Rosario hasta Puerto Argentino en nuestras Islas Malvinas.

Figura 83. Placa de distancia Rosario – Puerto Argentino

Le propongo verificar esa distancia. Específicamente vamos a calcular la distancia que hay desde el Monumento a la Bandera en Rosario hasta la Iglesia Cristiana de Puerto Argentino en las Islas Malvinas.

Figura 84. Iglesia Cristiana en Puerto Argentino.

Supondremos que la tierra es una esfera perfecta. Adoptaremos como diámetro de la misma su diámetro medio: 12742 km.

Vamos a comparar nuestro cálculo con otro que asumimos correcto. Debemos poner de relieve entonces que la distancia va a variar según cuales sean los puntos de referencia que se adopten. No sabemos si quienes hicieron el cálculo consideraron el Aeropuerto, el Cementerio Argentino u otro lugar de Malvinas; hay 91 km de distancia entre el primero y el segundo. En Rosario es probable que hayan elegido el Monumento a la Bandera o el mismo Monumento a los Caídos en Malvinas. Nosotros adoptamos las siguientes referencias:

Posición	**Coordenadas geográficas**	**Coordenadas esféricas**
Monumento a la Bandera en Rosario	32° 56' 52" S, 60° 37' 45" O	-32.948, -60.629
Iglesia Cristiana de Puerto Argentino en Malvinas	51° 41' 32" S, 57° 51' 32" O	-51.692,-57.859

Pautas para resolver

La distancia más corta entre dos puntos de la superficie de una esfera, es el arco de circulo máximo que pase por esos puntos. En nuestro caso es el arco que va desde Rosario a Puerto Argentino.

Resolución

Elegimos la resolución mediante software CAD. Esta herramienta brinda notables facilidades cuando se trata de resolver problemas donde intervienen objetos tridimensionales. El proceso sería el siguiente:

- Ubicar los puntos con coordenadas esféricas teniendo en cuenta que las coordenadas suministradas son geográficas por lo que debemos realizar la traducción correspondiente.
  Coordenadas de Rosario: 6371 < 299d22'15" < 327d03'08"
  Coordenadas de Puerto Argentino: 6371 < 302d08'28" < 308d18'28" donde el primer número es el radio de la tierra.
- Trazar el arco que une estos dos puntos con centro en el centro de la tierra.
- La longitud del arco a través de la escala, 2096.31 km y es la distancia buscada.

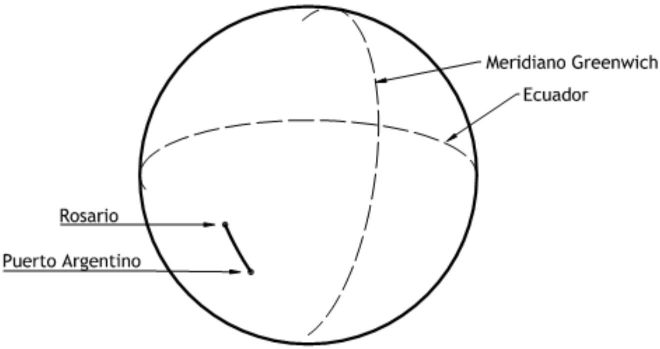

Figura 85. Arco Rosario – Puerto Argentino

Comparando con la distancia que figura en la placa, 2095.44 Km, encontramos una diferencia de 870 metros que puede explicarse porque el geoide no es una esfera perfecta o bien por los lugares exactos elegidos para hacer la medición; si es éste el caso, bastaría con correrse unas pocas cuadras para anular la diferencia.

Problema 23. Envases originales

En una oportunidad nos consultó un fabricante de cosméticos con un requerimiento bastante original. El hombre había impuesto un estilo de embalaje, entregando sus productos en cajas con forma de tetraedro, como el que se muestra en el croquis de figura 86.

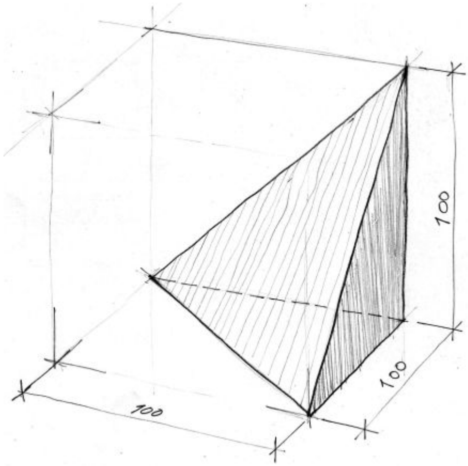

Figura 86. Croquis del envase

Se acercaba el mundial de futbol y deseaba entregar perfumes para hombres en frascos con forma de pelota de futbol, perfectamente esféricos, en su empaque tradicional. Su consulta apuntaba a conocer el diámetro mayor que podía darle al envase esférico para utilizar las cajas disponibles sin deformarlas.

Pautas para resolver

Inscribir una esfera del mayor diámetro posible en el tetraedro indicado. Las caras del poliedro serán planos tangentes a la esfera.

Análisis - Resolución

En primer lugar determinaremos el centro de la esfera. Por ser tangente a las caras del tetraedro el centro de la esfera debe pertenecer al plano bisector de cada ángulo diedro. Habrá entonces cuatro planos bisectores y dada la simetría del tetraedro todas las intersecciones de planos concurren a un punto que será el centro de la esfera buscada. El radio de la esfera queda determinado por el segmento de perpendicular que va desde el centro a una cara.

Una vez en claro cuál es el objetivo no habrá problemas en implementarlo con la herramienta de nuestra conveniencia. Una vez más sugiero utilizar el software CAD por su simplicidad, velocidad, precisión y posibilidades de visualización a lo largo de todo el proceso.

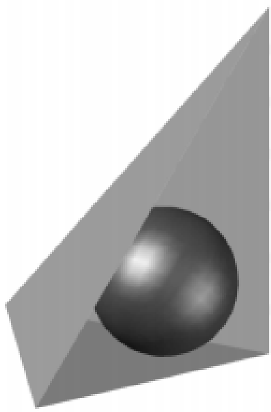

Figura 87. Envase en la caja abierta

Encontramos así que el diámetro máximo de la esfera es de 42.26 mm