Capítulo 9
Más allá de la representación gráfica

Vamos a presentar dos temas que podemos ubicar en el límite de lo que es la representación gráfica. Uno es el de los objetos representados mediante un dibujo ilustrativo y que nos plantean la incógnita sobre su posible existencia en el mundo real. El otro tema es el de los gráficos utilizados en acertijos o juegos de lógica.

Ya vimos que los dibujos ilustrativos de objetos tridimensionales, teniendo solamente dos dimensiones, son necesariamente incompletos. Se pueden encontrar e idear objetos representados por un dibujo ilustrativo que en realidad son imposibles de conseguir. He aquí algunos pocos ejemplos.

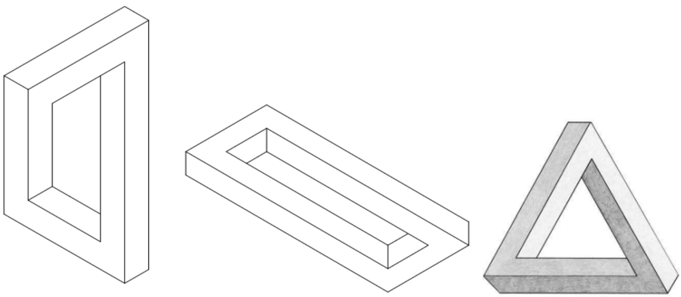

Figura 149. Objetos imposibles

Vamos a analizar algunos objetos propuestos con el propósito de determinar su viabilidad.

Construcciones complicadas

Problema 34. Estructura imposible

Se nos pregunta si es posible construir la estructura de madera que se muestra a continuación.

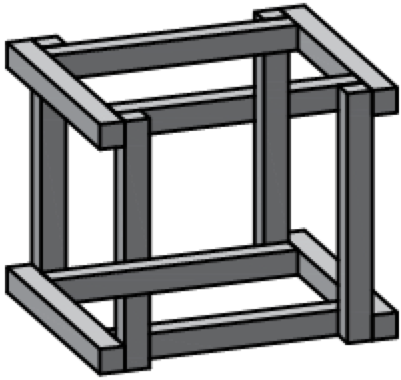

Figura 150. Estructura de madera... ¿es posible?

A primera vista es imposible. Pero antes de afirmarlo contundentemente miremos con un poco de detenimiento.

Pautas para resolver

Nuestro problema consiste en deducir la posibilidad o no de realizar esta construcción.

Tratemos de describir cuál es la dificultad.

¿Que tendríamos que hacer para construir la estructura?

Intentemos hacer un plano del objeto. Determinemos la aparente imposibilidad.

El objeto ¿es lo que percibimos en primera instancia? ¿O le cabe alguna otra forma posible que un dibujo ilustrativo no nos permite distinguir?

Explicación

Modificando el punto de vista vemos que la estructura propuesta no es realmente lo que aparentaba en un principio.

Como decía Mauritius Escher dibujar es engañar un poco.

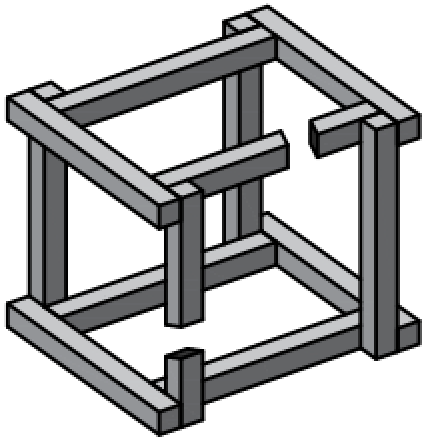

Figura 151. ¡Sí, es posible!

Gráficos y lógica

Traspasando ya las fronteras de la representación gráfica presentamos un juego de lógica que se desarrolla sobre un gráfico: SU-MA-DO. Es un desafío que requiere un mínimo conocimiento de aritmética y bastante lógica.

¿En qué consiste?

Hay círculos unidos por líneas que forman cuadrados y triángulos. Existen varios tipos de SU-MA-DOs que varían en dificultad según la cantidad de círculos. En cada uno de ellos hay un número diferente: de 1 a 9 si es un SU-MA-DO 3x3, de 1 a 16 si es un SU-MA-DO 4x4 y de 1 a 25 si es un SU-MA-DO 5x5. El número dentro de cada triángulo o cuadrado es la suma de los valores de los círculos o vértices de esa figura. El objetivo del juego es deducir los valores de cada vértice, algunos de los cuales ya están asignados. Se dan como ayuda los valores de algunos vértices.

En la figura tenemos un ejemplo de 3 x 3.

Este entretenimiento comparte algunas características del SU-DO-KU y las pirámides numéricas. Por la dificultad para resolver es más simple que el primero y más complicado de resolver que las últimas.

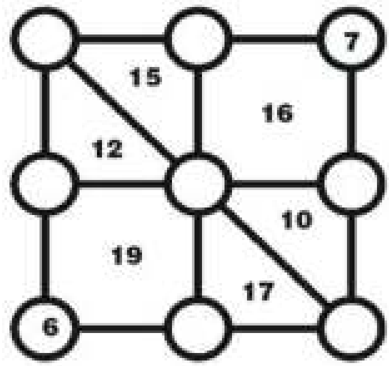

Figura 152. SU-MA-DO de 3 x 3

Ejemplo de resolución

Mostraré una forma posible de resolver el juego. La propuesta es seguir un razonamiento lógico que permita deducir el resultado.

Veamos de qué se trata el problema. Hay nueve circunferencias que ocupan los vértices de seis figuras; cuadrados y triángulos. En cada figura se ha escrito la suma de números ubicados en sus vértices. Los nueve vértices tienen asignados números diferentes del uno al nueve de los cuales se muestran dos.

Si deducimos progresivamente los números que pueden asignarse a cada vértice cuando en un vértice quede un solo número posible, le es asignado y se quita de los números que se pueden asignar a los restantes vértices.

Analicemos los casos extremos, por ejemplo el triángulo cuyos vértices suman 10. Si a dos de esos vértices se asignan los números 1 y 2, entonces el tercero debería ser 7. Esto no es posible, puesto que 6 y 7 ya están asignados. Por lo tanto el mayor número asignable es 5.

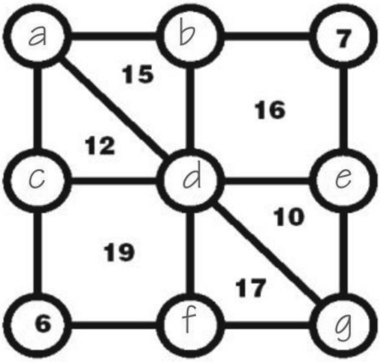

Figura 153. Asignación de letras a vértices

Las formas disponibles para sumar 10 son:

$$5+4+1 \text{ y } 5+3+2$$

Entonces el número 5 debe estar en alguno de los tres vértices analizados.

Veamos la suma de los vértices en la parte inferior derecha:

$$d+f+g=17 \quad [1]$$
$$d+e+g=10 \quad [2]$$

Los vértice d y g son compartidos en ambas sumas, entonces:

$$f=e+7 \; [3]$$

Con lo cual f puede ser: 8 o 9; e será 1 o 2 y entonces el número 5 le corresponderá a g o d

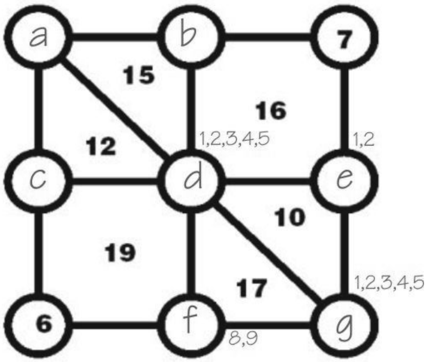

Figura 154. Proceso deducción

En el cuadrado del sector inferior izquierdo

$$c+d+6+f=19 \therefore c+d+f=13 \quad [4]$$

Sabemos que f puede ser 8 o 9. Entonces: $c + d$ = 5 o $c + d$ = 4. Como el menor valor asignable es 1, entonces c y d deben ser menores que 5. Eliminamos 5 de los valores que se pueden asignar a d con lo que estamos encontrando el primer número: $g = 5$ [5]

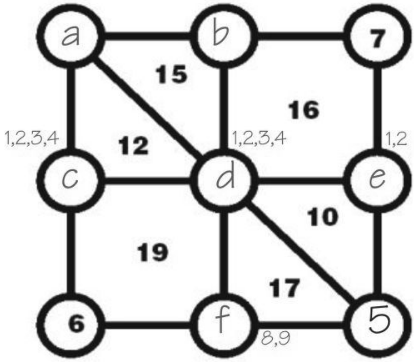

Figura 155. Proceso deducción

Con este dato la ecuación [1] queda $d+f=12$ [6]

De las ecuaciones [4] y [6] deducimos que c = 1

Eliminamos 1 como número asignable. Entonces e = 2

Reemplazando los valores hallados en la [2] queda d=3

A resultas de esto f=9

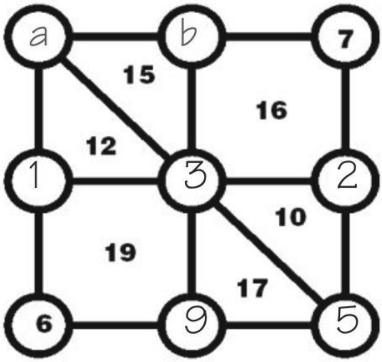

Figura 156. A punto de ser resuelto

En la parte superior izquierda del gráfico vemos que

$$a + 1 + 3 = 12$$

Resulta entonces a=8

Y ya no necesitamos continuar el análisis porque el único número que queda disponible es 4 y se lo debemos asignar al vértice b

Con lo que queda resuelto el juego.

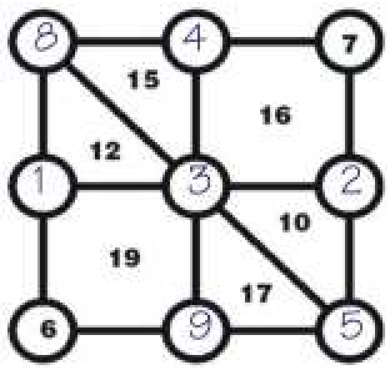

Figura 157. SU-MA-DO resuelto

Problema 35. Sumado 5 x 5

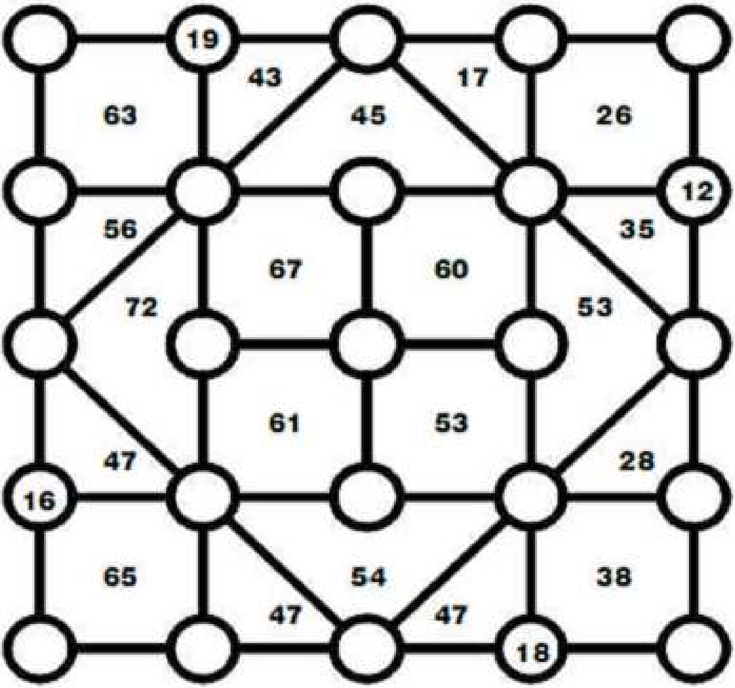

Figura 158. SU-MA-DO 5 x 5

Solución

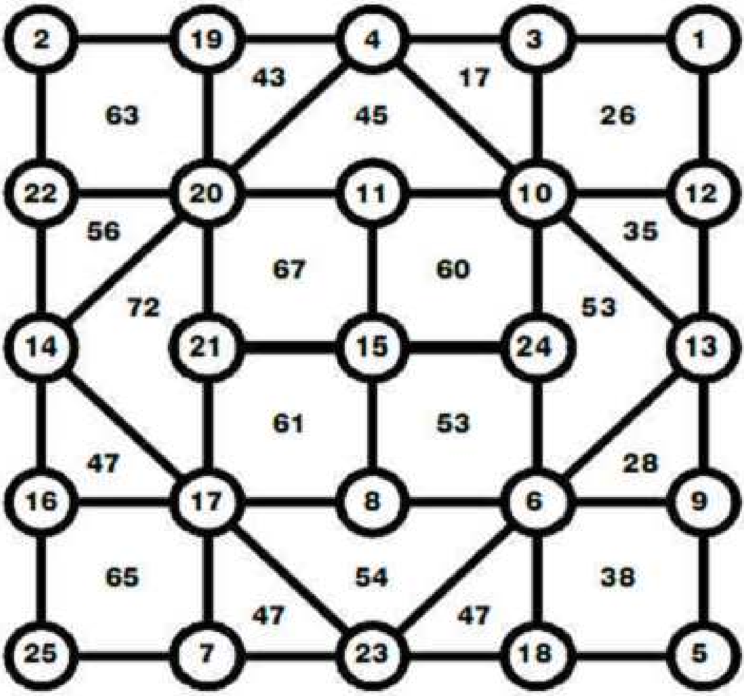

Figura 159. Solución al SU-MA-DO 5 x 5

Glosario

Definiciones y términos encontrados habitualmente en los temas de geometría y representación gráfica.

Ángulo diedro

El ángulo comprendido entre dos planos; las caras del diedro.

Ángulo sólido

El ángulo sólido es el ángulo espacial que abarca un objeto cuando es observado desde un punto de vista dado. Mide el tamaño aparente de ese objeto. La unidad del ángulo sólido en el Sistema Internacional es el estereorradián, cuyo símbolo es sr. Es el área del casquete esférico, en una esfera de radio unidad, abarcado por un cono cuyo vértice está en el centro de la esfera. Es una magnitud adimensional que se representa con la letra griega Ω.

Para calcular el ángulo sólido bajo el cual se ve un objeto desde un punto, se proyecta el objeto sobre una esfera de radio *R* conocido, centrada en el punto de vista. Si el área de la proyección del objeto sobre la esfera es *S*, entonces por definición, el ángulo sólido bajo el cual se ve el objeto es: $\Omega = S/R^2$

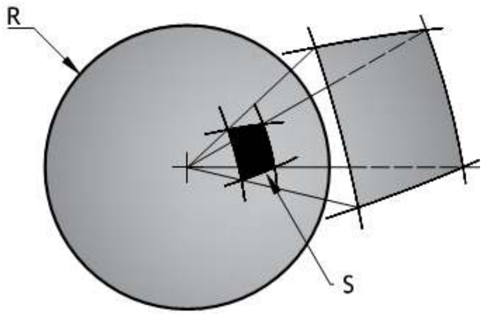

Figura 160. Ángulo sólido

Baricentro

El baricentro o centroide de un triángulo es el punto de intersección de las medianas de dicho triángulo. Para representar gráficamente el baricentro debemos trazar las tres medianas y localizar el punto en el que se cortan.

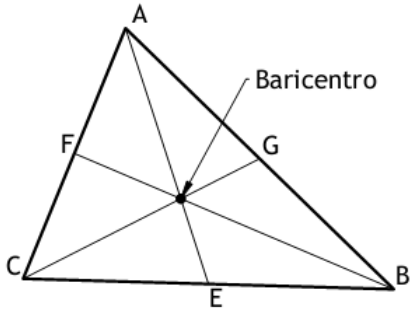

Figura 161. Baricentro del triángulo

Bisectriz

La recta que pasando por el vértice de un ángulo, divide a éste en dos ángulos iguales.

Centros del triángulo

Incentro, baricentro, circuncentro y ortocentro

Circuncentro

El *circuncentro* de un triángulo es el centro de la circunferencia circunscrita al triángulo, por lo que la distancia a cada uno de sus vértices es la misma e igual al radio de dicha circunferencia. Es el punto de intersección de las mediatrices de los lados del triángulo. Por tanto, para determinar gráficamente el circuncentro dibujamos las tres mediatrices y localizamos el punto de intersección de las mismas. Puede verse el circuncentro de un triángulo en figura 162.

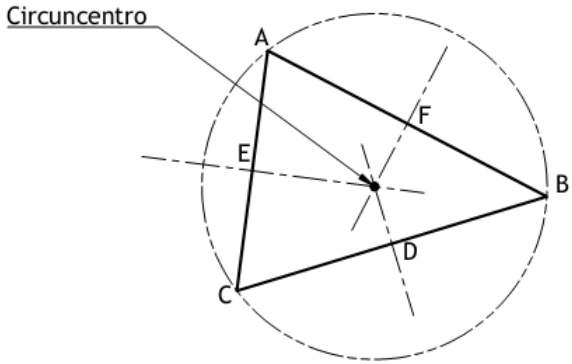

Figura 162. Circuncentro del triángulo

Croquis

Representación a mano alzada de un objeto. Es la forma más rápida de dibujar aunque también la menos precisa. Generalmente es el paso previo para la ejecución del plano normalizado definitivo.

Cuádrica

Superficie tridimensional correspondiente a una ecuación de segundo grado. Ejemplos son el elipsoide, paraboloide e hiperboloide.

Cuerda

Segmento rectilíneo, que une dos puntos de una circunferencia, sin pasar por el centro.

Diámetros conjugados de la elipse

Cada par de diámetros de la elipse que cumple que uno de ellos pasa por el centro de todas las cuerdas paralelas al otro.

Elipse

Es el lugar geométrico de los puntos del plano en que la suma de las distancias a otros dos puntos fijos llamados focos es constante.

Elipsoide

Superficie engendrada por una elipse cuando gira alrededor de uno de sus ejes.

Geometría

Es el arte y la ciencia de la descripción y la medida del espacio. Parte de las matemáticas que se encarga del estudio de las líneas, figuras y cuerpos, incluyendo su teoría y aplicaciones en las creaciones sobre papel. La geometría es una de las ciencias más antiguas. Inicialmente constituida en un cuerpo de conocimientos prácticos en relación con las longitudes, áreas y volúmenes.

Sus orígenes se remontan a la solución de problemas concretos relativos a medidas. Tiene su aplicación práctica en física aplicada, mecánica, arquitectura, cartografía, astronomía, náutica, topografía, balística, etc.

Geometría descriptiva

Es la ciencia que da los fundamentos para describir en un plano la estructura y propiedades métricas de objetos tridimensionales y, mediante la lectura de la representación plana realizar el proceso inverso.

Geometría gráfica

Disciplina que tiene por objeto la resolución de problemas geométricos por métodos gráficos. Se llega a esta definición por analogía con la Geometría Analítica cuyo objetivo es la resolución de problemas geométricos mediante métodos algebraicos.

Hipérbola

Curva plana, lugar geométrico de los puntos cuya diferencia de distancias a dos puntos fijos, llamados focos, es constante.

Incentro

El centro de la circunferencia inscripta al triángulo. La distancia a cada uno de los lados es la misma e igual al radio de la circunferencia. Es el punto de intersección de las bisectrices de cada uno de los ángulos del triángulo. Para determinarlo gráficamente se trazan las tres bisectrices; es el punto de intersección de las mismas.

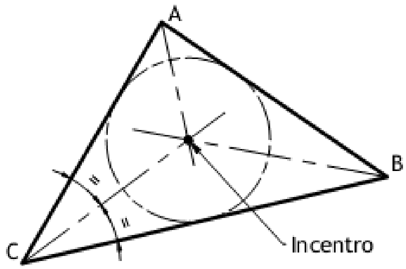

Figura 163. Incentro del triángulo

Lúnula

Es la parte del plano comprendido entre dos arcos de círculo con los mismos extremos y con las concavidades hacia el mismo lado.

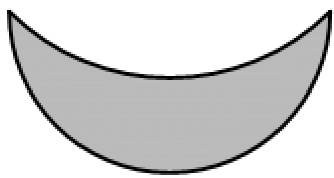
Figura 164. Lúnula

Mediana

Segmento que une un vértice de un triángulo con el punto medio del lado opuesto.

Mediatriz

La recta perpendicular a un segmento que pasa por el punto medio del mismo.

Ortocentro

El ortocentro de un triángulo es el punto de intersección de las tres alturas del triángulo. Entonces para representar gráficamente el ortocentro de un triángulo dibujamos las tres alturas y nos quedamos con el punto en el que se intersecan. Ver figura 165.

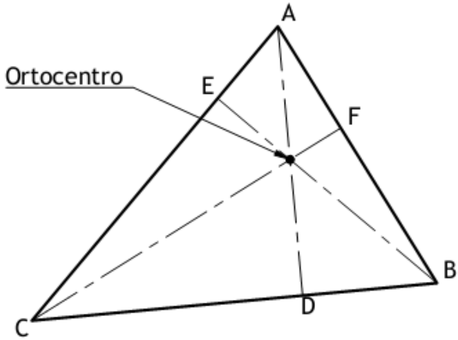

Figura 165. Ortocentro del triángulo

Parábola

Curva plana, lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan de un punto fijo, llamado foco, y de una recta llamada directriz.

Relación áurea o proporción áurea

Dados dos segmentos a y b, a más largo que b, con longitudes tales que la suma de ambos es al más largo como el más largo es al menor, entonces, se dice que los segmentos están en proporción áurea.

Como ecuación algebraica sería: $(a+b)/a = a/b$

El valor del número áureo Φ es la relación a/b

La relación algebraica se puede expresar como $1 + {}^{1}/_{\Phi} = \Phi$

Resolviendo queda $\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ =1,618 033 988 749 895

Triángulo equilátero, isósceles, escaleno

Se pueden distinguir los triángulos según cuántos lados o ángulos iguales que tengan.

- Triángulo equilátero: tres lados iguales; tres ángulos iguales, todos 60°
- Triángulo isósceles: dos lados iguales; dos ángulos iguales. La suma de los ángulos iguales es mayor que 0° y menor que 180°
- Triángulo escaleno: los tres lados y los tres ángulos diferentes.

Vista

Es la proyección de un objeto sobre un plano, de modo que:

- el objeto quede interpuesto entre el plano proyección y el observador, cuyos rayos visuales dan la dirección de proyección
- se ubique al objeto de forma que alguna de sus caras sea paralela al plano de proyección.

Esta definición, según norma IRAM 4501, se corresponde con el sistema ISO europeo.

Bibliografía

GARDNER M. “Mosaicos de Penrose y escotillas cifradas”, Alfaguara, 2009

INSTITUTO ARGENTINO PARA LA RACIONALIZACION DE MATERIALES, Normas IRAM para Dibujo Tecnológico

KATZ R., SABATINELLI P. "Geometría Analítica con Software". UNR Editora. 2012.

KINDLE J., “Geometría Analítica Plana y del Espacio”, McGraw-Hill, 1987.

LOOMIS E. "The Pythagorean Proposition". 1968.

POLYA G., “Como plantear y resolver problemas”, Trillas, 1969.

STACHEL H., “The status of todays Descriptive Geometry related education (CAD/CG/DG) in Europe”, Proc. Annual Meeting of JSGS 2007, 40th anniversary of Japan Society for Graphic Science, Tokyo/Japan, 2007.

STEWART J. “Cálculo de una variable”, Séptima edición, 2012.

VERGER G., LINE E. "Maximizing the Rhombic Cross-Section in a Rectangular Prism", Revista ‘Sigma Math’, Mensa UK.

VERGER G., BARBERI E., ST JEAN G., “Representación gráfica con herramientas CAD – 1 Problemas tradicionales”, V Congreso Internacional de Expresión Gráfica, EGRAFIA 2014.

VERGER G., D’ASCANIO F., ACIEN F., CARUSO E., LOMÓNACO V., “Representación gráfica con herramientas CAD – 2 Cálculo gráfico”, V Congreso Internacional de Expresión Gráfica, EGRAFIA 2014.

WELLMAN, B.L., “Geometría descriptiva”. Editorial Reverte, 2003.

Listado de problemas

Esta edición de 200 ejemplares se terminó de imprimir el 12 de diciembre de 2014 en los talleres gráficos de la Imprenta Editorial Magenta, Av. Pellegrini 358, 2000 Rosario, Argentina