Capítulo 6
Poliedros regulares

Llamamos poliedro a un cuerpo geométrico sólido limitado por un conjunto finito de polígonos planos tales que cada uno de los lados pertenezca a dos de dichos polígonos, y que dos polígonos cualesquiera que tengan un lado común no pertenezcan a un mismo plano.

Elementos de los poliedros

Elementos geométricos fundamentales de los poliedros son:

- Caras: son los polígonos planos que lo limitan.
- Aristas: son los lados de las caras.
- Vértices: son los extremos de las aristas.
- Ángulos planos: son los ángulos de las caras.
- Ángulos diedros son los ángulos formados por dos caras contiguas.
- Ángulos poliedros: Son los ángulos sólidos formados por las aristas concurrentes en cada uno de los vértices, y cuyas caras son los ángulos planos que tienen un vértice común.

Definición

Se llama *poliedro regular* al poliedro cuyas caras son todas polígonos regulares e iguales, y cuyos ángulos diedros son todos iguales. Se los conoce también como Sólidos de Platón

Existen nada más que cinco poliedros regulares convexos.

En efecto, para formar un ángulo sólido, es menester por lo menos tres ángulos planos, y que, además, la suma de los ángulos planos que han de formar el ángulo sólido o poliedro valga menos que cuatro rectos (360º). Se deduce que sólo pueden existir los siguientes casos:

Caras concurrentes al vértice	**Ángulos a sumar**	**Suma de los ángulos**
3 triángulos equiláteros	3 x 60º	180º
4 triángulos equiláteros	4 x 60º	240º
5 triángulos equiláteros	5 x 60º	300º
3 cuadrados	3 x 90º	270º
3 pentágonos regulares	3 x 108º	324º

Es decir, solo pueden existir cinco poliedros regulares convexos. Llamando:

C: Número de caras del poliedro
A: Número de aristas del poliedro
V: Número de vértices del poliedro
M: Número de lados de cada cara
N: Número de aristas en cada vértice

Como se tienen que cumplir las condiciones:

$$m \geq 3 \text{ y } 3 \leq n < 6$$

resulta el siguiente cuadro correspondiente a los únicos cinco poliedros regulares convexos existentes:

Nombre	**M**	**N**	**C**	**V**	**A**	**Naturaleza**	
						Caras	**Ángulos sólidos**
TETRAEDRO	3	3	4	4	6	Triángulos	Triedros
OCTAEDRO	3	4	8	6	12	Triángulos	Tetraedros
ICOSAEDRO	3	5	20	12	30	Triángulos	Pentaedros
CUBO	4	3	6	8	12	Cuadrados	Triedros
DODECAEDRO	5	3	12	20	30	Pentágonos	Triedros

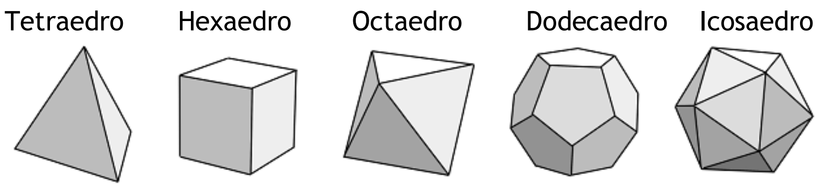

Figura 98. Poliedros regulares

Modelado de poliedros regulares

Un poliedro regular queda perfectamente especificado con un solo dato, por ejemplo, la medida de sus lados.

Modelar un poliedro regular es cosa simple si se conoce el camino para hacerlo. En la práctica existen diferentes posibilidades para cada poliedro, cada una con su correspondiente exigencia de laboriosidad. Le propongo explorar un camino simple, común a todos los poliedros: modelarlos a partir de un cubo. Ciertamente que generar un cubo no ofrece ninguna dificultad, sea en sistema diédrico, axonométrico o CAD y por tanto es bastante razonable utilizarlo como punto de partida.

Tetraedro regular

Observando el cubo notamos que las diagonales de caras opuestas son perpendiculares como las aristas no concurrentes de un tetraedro y las que son coplanarias forman triángulos equiláteros.

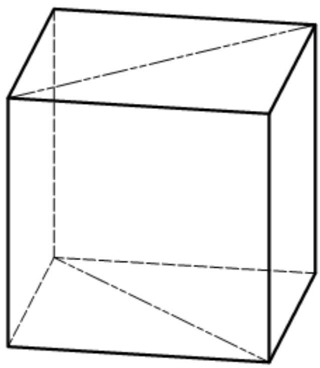

Figura 99. Diagonales de caras opuestas en cubo

Entonces, podemos formar cuatro triángulos equiláteros con igual disposición que las caras de un tetraedro regular como se aprecia en figura 100.

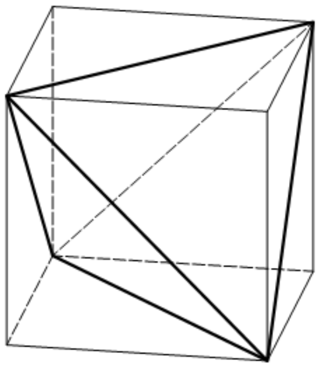

Figura 100. Diagonales que forman un tetraedro

Una vez que tenemos determinadas aristas y vértices del poliedro procedemos a modelar cortando por los vértices que determinan cada una de las caras. En el caso de poliedros convexos esto es posible ya que el poliedro queda en un mismo semiespacio respecto del plano determinado por cada cara.

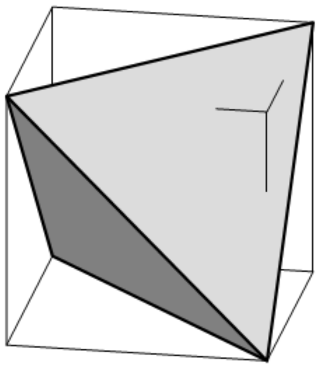

Figura 101. Tetraedro a partir de un cubo

Relación entre las aristas del tetraedro y del cubo:

$$l = \sqrt{2} \times a$$

Donde:

l : es la arista del tetraedro y

a: es la arista del cubo

Octaedro regular

El octaedro regular es el poliedro conjugado del hexaedro regular, por lo tanto lo podemos obtener determinando los puntos medios de las caras del cubo, que serán los vértices del octaedro y luego cortando con planos secantes que pasen por los puntos de tres caras mutuamente adyacentes.

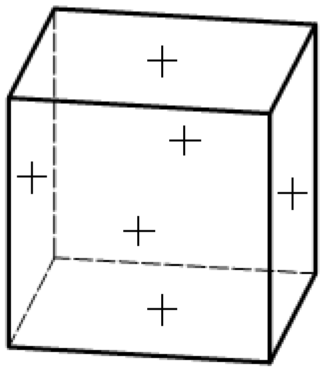

Figura 102. Puntos medios de las caras del cubo

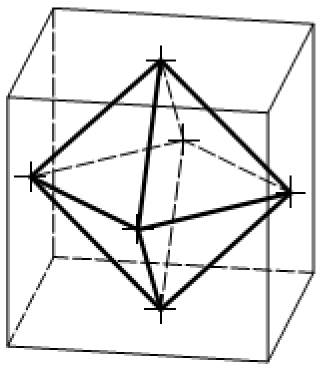

Figura 103. Trazado aristas octaedro regular

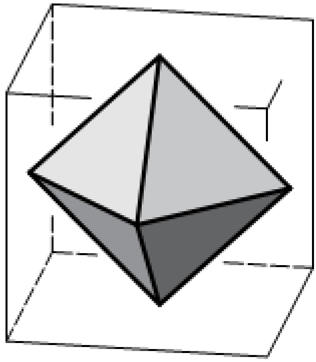

Figura 104. Octaedro a partir de un cubo

La relación entre las aristas del octaedro regular y las del cubo es:

$$l = \frac{\sqrt{2}}{2} \times a$$

Donde:
l: es la arista del octaedro y
a: es la arista del cubo

Alternativamente se puede modelar un octaedro regular a partir tres cuadrados pertenecientes a planos perpendiculares entre sí, con las diagonales compartidas. Los lados de los cuadrados pasan a ser lados del octaedro.

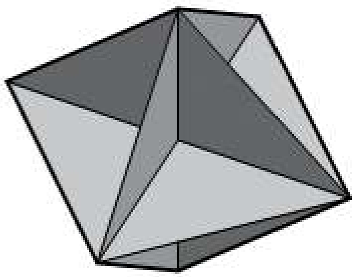

Figura 105. Modelado alternativo de octaedro regular

Dodecaedro regular

La relación entre el lado de un dodecaedro y el del cubo a partir del cual se puede modelar es:

$$l = \frac{a}{\Phi^2}$$

Donde:

l : es la arista del dodecaedro,

a: es la arista del cubo y

Φ: es el valor de la relación áurea.

Adoptaremos el valor aproximado de Φ = 1,618. Para un cálculo más exacto ver relación áurea en el glosario.

La relación de lados resultante es: $l = 0{,}382 \times a$

El lado del dodecaedro lo podemos obtener gráficamente mediante la construcción de figura 106.

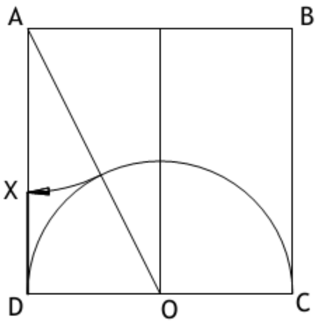

Figura 106. Obtención lado dodecaedro

La construcción se justifica porque en el cuadrado ABCD de lado a tenemos:

$$AO^2 = AD^2 + DO^2 = a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2$$

$$AO = \sqrt{a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{5}}{2} \times a$$

$$l = XD = a - \left(AO - \frac{a}{2}\right) = a - \left(\frac{\sqrt{5}}{2} \times a - \frac{a}{2}\right) = \left(\frac{3 - \sqrt{5}}{3}\right) \times a$$

$$l = 0{,}382 \times a$$

Comenzamos colocando segmentos de longitud igual a 0,382 veces la arista del cubo en los centros de dos caras opuestas y paralelos a un par de lados. En las caras restantes también colocamos segmentos de la misma longitud, cuidando que sean perpendiculares a los segmentos de las caras adyacentes. Estos segmentos van a ser aristas de nuestro dodecaedro regular.

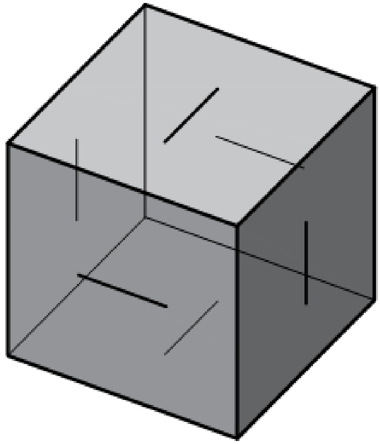

Figura 107. Fijación aristas dodecaedro

Cada arista, conjuntamente con el extremo más próximo de de la arista de la cara adyacente más próxima, determina un plano que contendrá una cara del dodecaedro. El modelado implica cortar el cubo por las caras determinadas "quitando el material excedente". Cuando se hayan preparado las caras del dodecaedro que concurren a la cara superior del cubo y las caras laterales tendremos un sólido como el que muestra la figura 108; el dodecaedro en proceso de modelado.

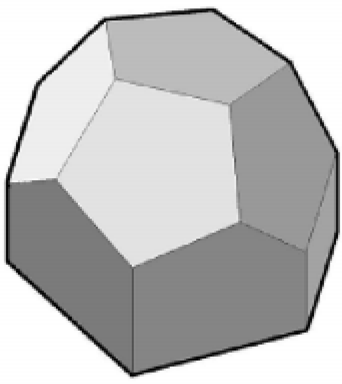

Figura 108. Dodecaedro en modelado

En el caso del modelado con software CAD una vez que se ha modelado la mitad del poliedro es posible hacer una copia, alinearla adecuadamente y por intersección de volúmenes obtener el dodecaedro regular como muestra figura 109.

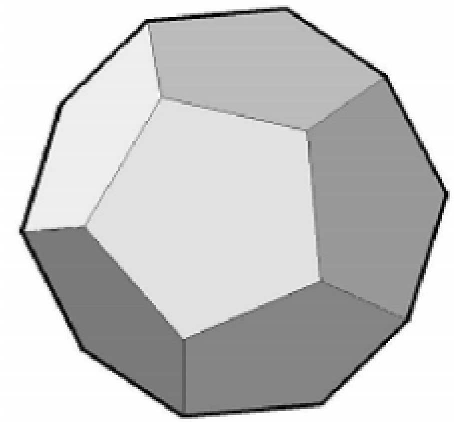

Figura 109. Dodecaedro regular

Icosaedro regular

La relación entre el lado de un icosaedro regular y el del cubo a partir del cual se puede modelar es:

$$l = \frac{a}{\varphi}$$

Donde:

l : es la arista del dodecaedro,

a: es la arista del cubo y

φ: es el valor de la relación áurea.

La relación de aristas es: $l = 0{,}618 \times a$

Este último valor se puede obtener gráficamente mediante la construcción de figura 110.

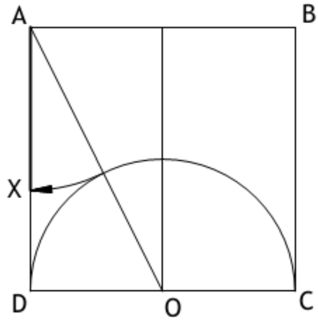

Figura 110. Obtención lado icosaedro

La ubicación de los segmentos con que iniciamos el modelado se realiza con un criterio similar al utilizado para modelar el dodecaedro regular. Colocamos dos segmentos de longitud igual a 0,618 veces la arista del cubo en los centros de dos caras opuestas y paralelos a una dirección de lados. En las caras restantes colocamos segmentos de la misma longitud, cuidando que sean perpendiculares a los segmentos de las caras adyacentes. Estos segmentos van a ser aristas de nuestro icosaedro regular.

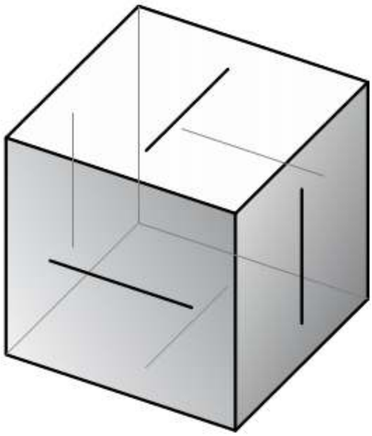
Figura 111. Fijación aristas icosaedro

Cada arista, conjuntamente con el extremo más próximo de la arista de la cara adyacente, determina un plano que contendrá una cara del icosaedro.

El modelado implica cortar el cubo por las caras determinadas “quitando el material excedente”. Cuando se hayan preparado las caras del icosaedro que concurren a la cara superior del cubo y las caras laterales tendremos un sólido como el que muestra la figura 112; el icosaedro en proceso de modelado.

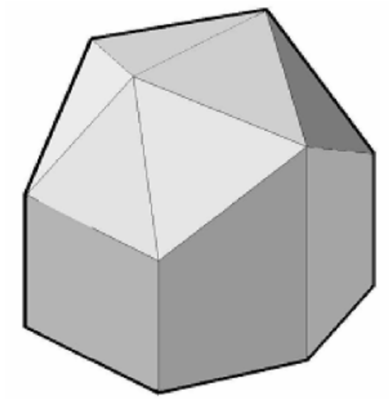

Figura 112. En proceso de modelado

Una vez más, en caso del modelado con software CAD, cuando se ha modelado la mitad del poliedro es posible hacer una copia, alinearla adecuadamente y por intersección de volúmenes obtener el icosaedro regular como muestra figura 113.

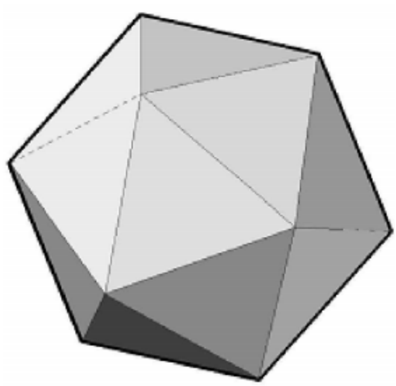

Figura 113. Icosaedro regular

Icosaedro truncado

Siendo que estamos en un país futbolero no podríamos dejar este tema sin antes mencionar que operando sobre este último poliedro regular se obtiene el esquema de gajos de un modelo de pelota de futbol que estuvo en uso durante mucho tiempo.

A partir del icosaedro regular, truncando los vértices por puntos que pasen a una distancia del vértice igual a un tercio de la longitud de la arista, el plano secante da lugar a una nueva cara pentagonal, y las caras triangulares del icosaedro se transforman en caras hexagonales. El resultado de este proceso es un poliedro conocido como icosaedro truncado que podemos ver figura 114.

Figura 114. Icosaedro truncado