Capítulo 2
Representaciones planas

Implementación

Existen varias formas de materializar una representación gráfica, a saber:

- croquis técnico,
- trazado con instrumentos y
- trazado con software CAD

Croquis técnico

Se realiza a mano alzada, empleando únicamente lápiz, papel y goma de borrar. Exige destreza manual que se puede desarrollar con la práctica; carece de precisión pero es el más rápido de todos. Ideal para tomar notas y comunicar ideas.

Trazado con instrumentos

Se utilizan instrumentos de trazado para guía y medición. Se consigue buena precisión y exactitud. Los trabajos insumen más tiempo que los realizados en forma de croquis. Hasta la aparición de los programas CAD era la forma de trabajar en representación gráfica.

Trazado con software CAD

La sigla CAD es la abreviatura del término inglés 'Computer Aided Design'. Desde que aparecen los primeros programas para trazado han ido reemplazando progresivamente al trazado con instrumentos.

El trazado con software CAD requiere adiestramiento para su manejo e insume tiempo en su ejecución; pensemos que para cada elemento geométrico que queramos ubicar nos serán solicitados todos los datos necesarios para hacerlo. El beneficio es que los trazados alcanzan total exactitud y precisión. Otra ventaja importante es que, al reutilizarse el trabajo realizado previamente, las modificaciones y correcciones se resuelven con mayor rapidez.

Trazado de curvas

Trazamos curvas que, o bien forman parte de la representación de un objeto o tienen por objeto mostrar la evolución de una función matemática. La discusión de una ecuación y su representación gráfica constituyen, en conjunto, un problema de gran importancia en todas las ramas de la matemática y sus aplicaciones; se le ha dado el nombre especial de 'Construcción de Curvas'.

El software CAD dispone de comandos para el trazado de algunas curvas muy comunes: planas, como circunferencias, elipses y sus correspondientes arcos o bien tridimensionales, como hélices. Se obtienen las curvas invocando el comando e ingresando los parámetros correspondientes en cada caso. Si a la hélice le damos altura nula el resultado será una curva plana, la espiral de Arquímedes.

Cuando las curvas que se requieren no están contempladas entre los comandos del software será necesario determinar los puntos de paso para su trazado. Nos encontramos así con que una curva puede ser trazada

- por cálculo: Se determinan las coordenadas de una cantidad adecuada de puntos.
- por método de trazado; similar al trazado con instrumentos tradicionales.

Técnicas alternativas de trazado

Presentaremos técnicas de trabajo alternativas para el trazado de una curva, la parábola, procurando que sirva de modelo para cualquier tipo de curva.

- Por su definición
- Como envolvente de tangentes
- Por construcción geométrica
- Por su ecuación
- Mediante línea SPLINE con vértices de control
- Como sección plana de un cono

1.Por su Definición

Curva plana, abierta, de una sola rama, simétrica respecto de un eje, sobre el que se ubica un punto fijo llamado foco. Los puntos de la parábola cumplen la condición de equidistar del foco y de una recta normal al eje llamada directriz.

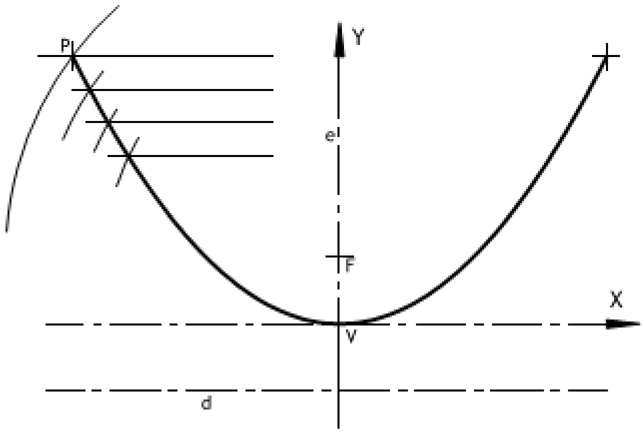


Figura 1. Trazado de Parábola según definición

- Aplicabilidad: para toda curva que tenga una definición geométrica.
- Ventajas: Los puntos de paso seleccionados son exactos.
- Desventajas: Requiere de la determinación manual de una cantidad de puntos, creciente con la precisión exigida. Exige gran laboriosidad.

2.Envolvente de tangentes

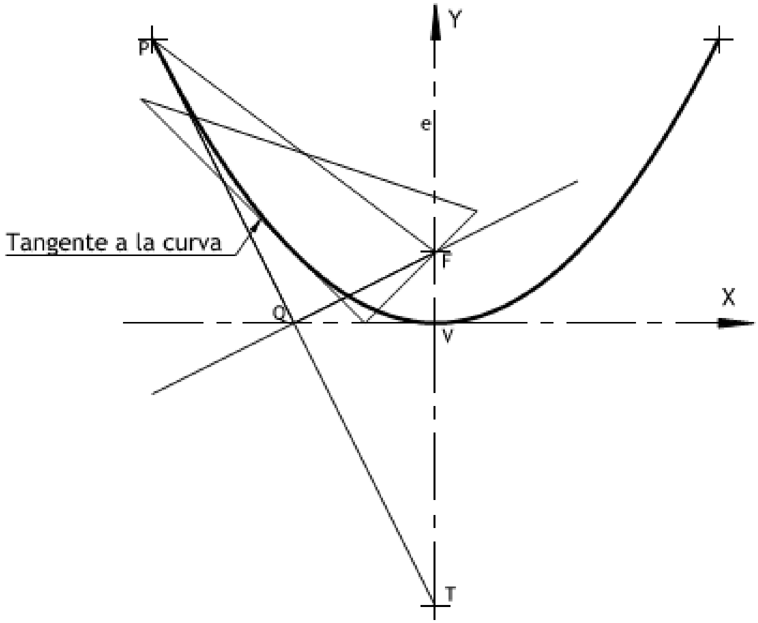


Figura 2. Parábola por envolvente de tangentes

- Aplicabilidad: cuando se conozca la definición del conjunto de rectas tangentes a la curva.
- Ventajas: Ninguna en particular.
- Desventajas: Requiere de la determinación manual de una cantidad de puntos, creciente con la precisión exigida. No se puede tener certeza sobre la exactitud de los puntos seleccionados. Exige gran laboriosidad.

3.Construcción geométrica

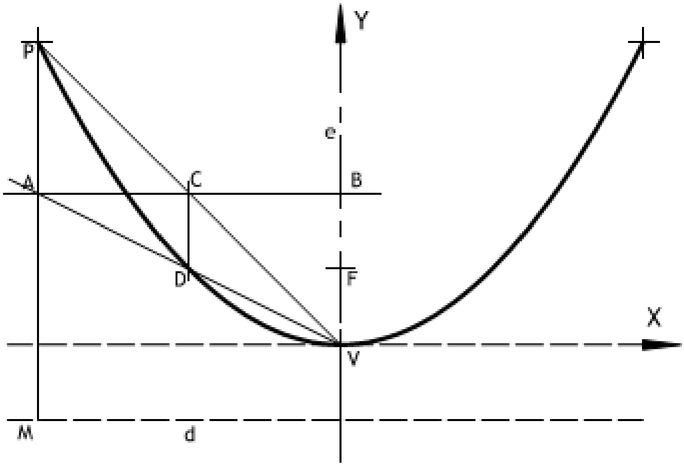


Figura 3. Parábola por eje, vértice y punto de paso

Se traza AB normal al eje e que corta PM en el punto A, unimos A con el vértice V; C es intersección de AB con VP. La paralela al eje e que pasa por C al cortar AV determina D, punto de paso de la parábola.

- Aplicabilidad: para toda curva que disponga de método constructivo.
- Ventajas: Los puntos de paso seleccionados son exactos.
- Desventajas: Requiere de la determinación manual de una cantidad de puntos, creciente con la precisión exigida. Exige gran laboriosidad.

4. Spline con vértices de control

Con software CAD se pueden trazar cónicas utilizando líneas *SPLINE* grado 3 con vértices de control. Modificando el peso del vértice ubicado sobre el eje de simetría de la curva se obtendrán diferentes cónicas a saber:

- Peso = 1 : parábola
- Peso > 1 : hipérbola
- Peso < 1 : arco de elipse

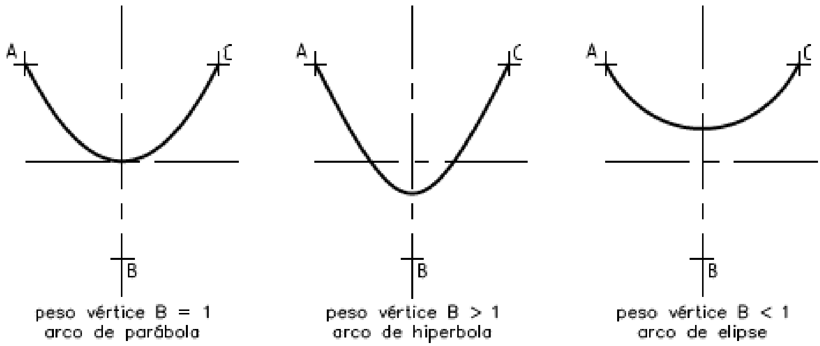


Figura 4. Línea ‘spline’ y vértices de control con diferente peso

El procedimiento para trazar la parábola consta de los siguientes pasos:

- Determinar el simétrico del punto dado respecto del eje de la parábola y
- Determinar un vértice de control sobre el eje de la parábola a una distancia del vértice igual a la distancia del vértice al punto dado medida sobre el eje de la parábola.
- Trazar una línea spline en modo ‘Vértices de Control’ seleccionando los puntos siguiendo el orden: punto de paso, vértice de control sobre el eje de la parábola y simétrico del punto de paso.

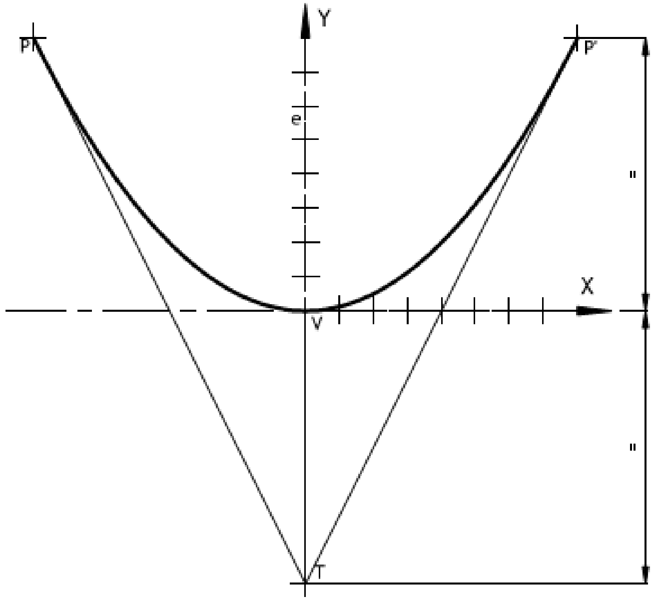


Figura 5. Parábola por línea spline y vértices de control

5.Por su ecuación

Los puntos de paso de la curva se determinan evaluando la función dentro del entorno de valores que se quiere representar.

En el caso presentado puntos de paso de la curva fueron calculados utilizando MS Excel sobre una plantilla que se ha preparado para estos casos.

En primer lugar se muestran los parámetros utilizados.

Curva	Parábola
Valor inicial	-8
Valor final	8
Divisiones	64
Coeficiente 'a'	0,125
División	0,25
Ecuación cartesiana	=c5*POTENCIA(C$14;2))

Y seguidamente un extracto de la tabla de valores.

Nro.	X	Y	Texto
0	-8	8,0000	-8,8
1	-7,75	7,5078	-7.75,7.5078125
2	-7,5	7,0313	-7.5,7.03125
3	-7,25	6,5703	-7.25,6.5703125
4	-7	6,1250	-7,6.125
5	-6,75	5,6953	-6.75,5.6953125
6	-6,5	5,2813	-6.5,5.28125
7	-6,25	4,8828	-6.25,4.8828125
8	-6	4,5000	-6,4.5
9	-5,75	4,1328	-5.75,4.1328125
10	-5,5	3,7813	-5.5,3.78125

La última columna es copiada y pegada en la ventana de texto cuando el software solicita datos para los puntos de la línea SPLINE.

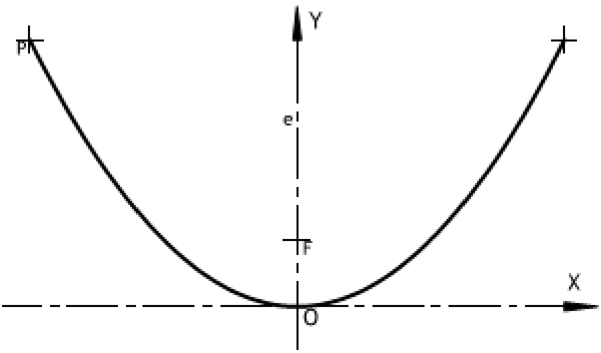


Figura 6. Parábola según su ecuación

- Aplicabilidad: para toda curva descripta por una función analítica.
- Ventajas: Los puntos de paso seleccionados son exactos. Se puede automatizar el proceso con suma facilidad.
- Desventajas: En tanto no se disponga la determinación de los puntos dentro de la propia herramienta CAD se estará dependiendo de una herramienta asociada.

6. Sección plana de un cono

Se puede generar la misma parábola anterior como sección plana de una superficie cónica adecuada.

Este método es de interés teórico únicamente. No resulta práctico frente a otros métodos vistos que son más directos. Sirve para verificar que seccionando adecuadamente una superficie cónica se puede obtener la parábola deseada.

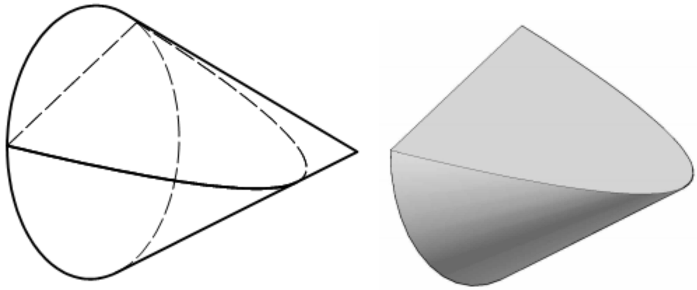


Figura 7. Parábola por sección plana de un cono

Después de construir una parábola especificada por un punto de paso y su vértice como resultante de una sección plana, consultando el software CAD, llegamos a la conclusión que se puede construir perfectamente como spline por vértices de control.

En splines cuadráticas de tres vértices, cuando el peso de los vértices extremos es 1, el peso del vértice intermedio determina el tipo de cónica resultante (arco elíptico, parábola o hipérbola)

Curiosidades

Los manuales que tratan sobre trazados geométricos describen diversos métodos para el trazado de cónicas utilizando compás, escuadra y hasta una tira de papel para trasladar distancias por lo que no abundaremos sobre ellos. Presentaremos una forma original de obtener una parábola y una elipse.

Parábola

El primero como método alternativo a los presentados en páginas anteriores destinado a la obtención de una parábola mediante plegado de papel. Para implementarlo será necesario disponer de una hoja rectangular y proceder de la siguiente forma:

- Elegimos un filo de la hoja; será la directriz de la parábola.
- Marcamos un punto F cercano a la directriz. Este punto será el foco de la parábola y servirá como punto de apoyo.

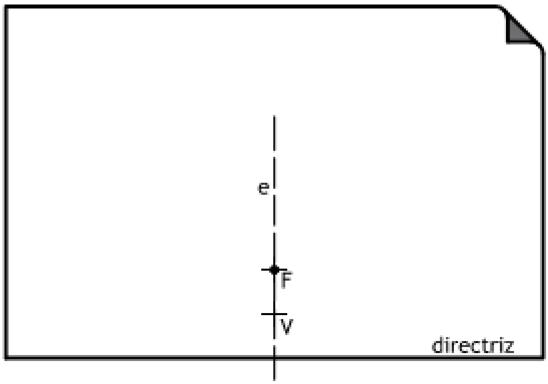


Figura 8. Preparación papel para plegar tangentes de parábola

- Realizamos pliegues de la hoja tales que el filo elegido como directriz pase por el foco F de la parábola; el pliegue obtenido será una tangente a la parábola; como se muestra en figura 9.

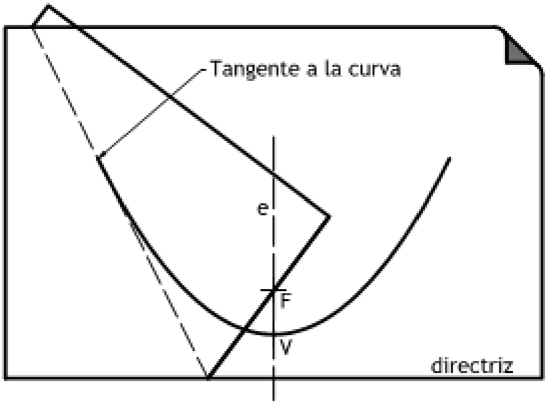


Figura 9. Plegado del papel para obtener una tangente

- A medida que se repite este último paso irá apareciendo progresivamente la forma de la parábola como se muestra en la figura 10.

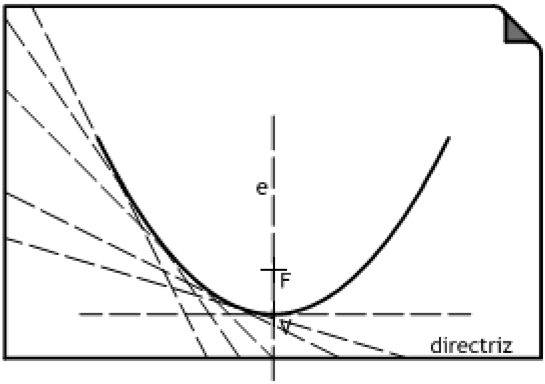


Figura 10. Pliegues del papel forman una parábola

Después de repetir el plegado suficiente cantidad de veces nos encontraremos con que la envolvente de las líneas que han quedado marcadas en el papel es una parábola. El punto de apoyo es el foco de la parábola.

Elipse

Para obtener la elipse será necesario disponer de un círculo recortado sobre un papel o bien una circunferencia trazada sobre un papel que al ser plegado, por transparencia, permita apreciar la circunferencia. En el interior del círculo marcamos un punto de apoyo A, como se muestra en figura 11.

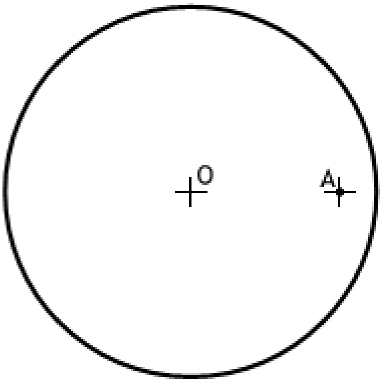


Figura 11. Círculo con su centro y un punto de apoyo

Como paso siguiente plegamos el papel de forma tal que algún punto de la circunferencia pase por el punto de apoyo como se ve en figura 12.

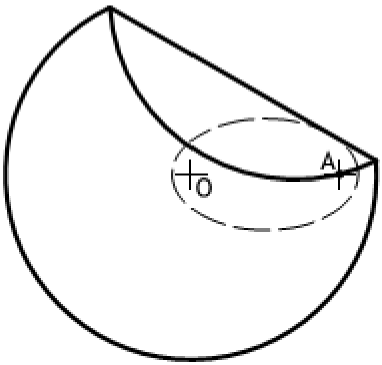


Figura 12. Marcado de pliegues

Después de repetir el plegado suficiente cantidad de veces nos encontraremos con que la envolvente de las líneas que han quedado marcadas en el papel es una elipse. El centro de la circunferencia y el punto de apoyo son focos de la elipse.

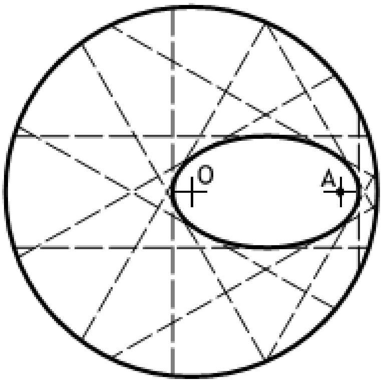


Figura 13. Elipse definida por pliegues de circunferencia

Demostración de teoremas

La representación gráfica se puede utilizar para demostrar teoremas. El teorema de Pitágoras debe ser uno de los que tiene mayor cantidad de demostraciones diferentes. Elisha S. Loomis en su libro "The Pythagorean Proposition" catalogó 367 pruebas diferentes. Las hay de varias clases: analíticas, basadas en resultados de otros teoremas y geométricas. Presentamos una solución gráfica, de las más conocidas, atribuida al propio Pitágoras.

El teorema dice que "en todo triángulo rectángulo el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos".

Para demostrarlo construimos dos cuadrados de lados a+b a los que dividimos como se muestra en la figura 14.

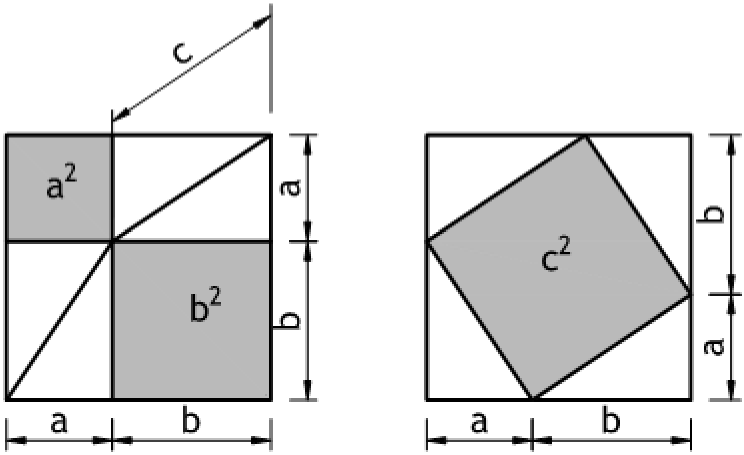


Figura 14. Demostración gráfica del Teorema de Pitágoras

En la imagen izquierda el área sombreada es igual a a^2+b^2, correspondiente a la superficie de dos cuadrados de lados a y b respectivamente.

En la imagen derecha el área sombreada es igual a c^2, corresponde a la superficie de un cuadrado de lados c.

Se comprueba que en ambos casos el área sombreada es igual a la diferencia entre el área del cuadrado de lado a+b y los cuatro triángulos rectángulo de catetos a y b. Por lo que se infiere que el área sombreada es igual en ambos casos. Es decir $a^2+b^2=c^2$

Problemas varios

Los problemas que se plantean a continuación muestran la variedad de situaciones en que la representación gráfica puede resultar útil.

Problema 2. Cinco circunferencias

Se tienen 25 puntos dispuestos en una grilla de 5 x 5. Encontrar un conjunto de 5 circunferencias que pasen por cada uno de los 25 puntos al menos una vez.

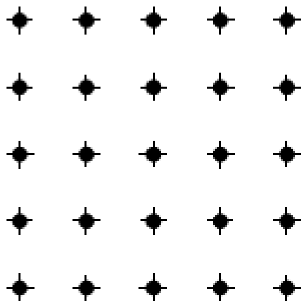


Figura 15. Grilla con distribución de puntos

Este problema admite varias soluciones. Se presenta una de ellas.

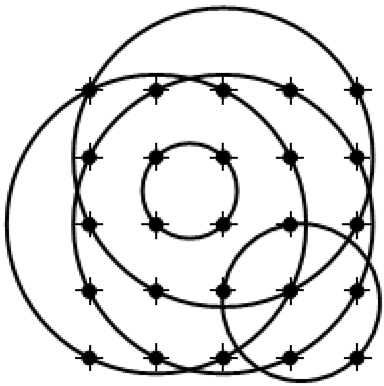


Figura 16. Una solución al problema de las cinco circunferencias

Problema 3. Dividir en triángulos

Se tiene un triángulo isósceles, con lados de proporciones 3, 2 y 2. El ángulo entre los dos lados iguales es aproximadamente 97° (triángulo obtusángulo). ¿Cómo se podrá cortar en una serie de pequeños triángulos que sean todos isósceles acutángulos, es decir, todos los ángulos menores de 90 grados? *Propuesto por Elliott Line en Puzzle Sig*

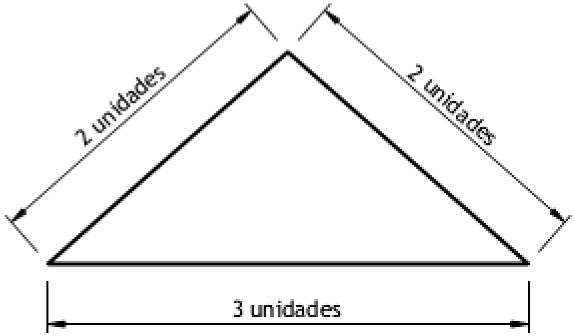


Figura 17. Triángulo a dividir en triángulos

Pautas para resolver

Considere que al solicitar triángulos isósceles habrá requerimientos de simetría; fuera de esto no existe una secuencia de razonamiento que nos lleve a encontrar una solución. Este problema exige pensamiento de tipo creativo. Habrá que realizar pruebas por diferentes caminos hasta encontrar una solución aceptable.

Solución

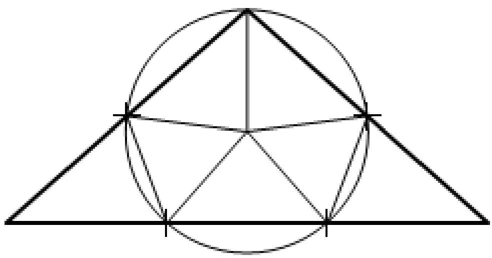


Figura 18. Triángulo dividido en triángulos isósceles

Problema 4. Triángulo equilátero con una servilleta

No es de extrañar que siendo uno profesor de representación gráfica me hayan planteado problemas geométricos en situaciones o lugares insólitos. Fue así que estando en un bar, me pidieron que materializara un triángulo equilátero. Por supuesto que se trataba de hacerlo con los materiales disponibles en ese momento; es decir, una servilleta de papel. Verificamos las proporciones del accesorio gastronómico y resultó ser un cuadrado que a partir de ese momento consideramos un cuadrado perfecto. ¿Qué hubiese hecho usted?

Pautas para resolver

Para asimilarse a la situación planteada solo necesita una hoja de papel cuadrada; si es rectangular debería marcarla para que con un plegado previo se transforme en un cuadrado.

Ahora piense las características del triángulo equilátero.

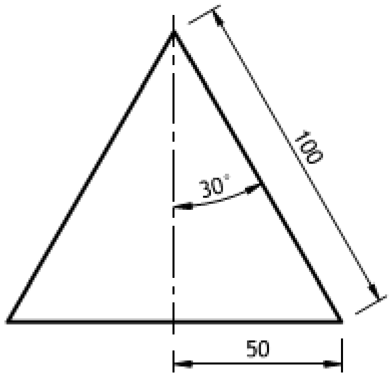


Figura 19. Proporciones del triángulo equilátero

Y a continuación como se vería ese triángulo en el cuadrado.

Resolución

En el triángulo equilátero los ángulos internos son todos iguales a 60°. Nos proponemos como objetivo determinar ángulos de 30° o de 60° dentro del cuadrado. Observando las proporciones del triángulo equilátero vemos que las podemos replicar dentro del cuadrado de la siguiente forma:

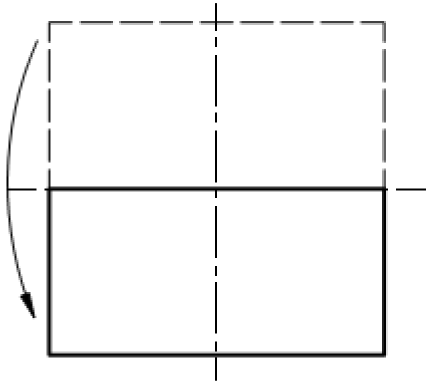


Figura 20. Primer pliegue para marcar el cuadrado

Plegamos el cuadrado por la mitad y marcamos ese pliegue para poder utilizarlo posteriormente.

A continuación se realiza un segundo pliegue que pase por un vértice del cuadrado y la esquina adyacente apoye en el pliegue realizado anteriormente.

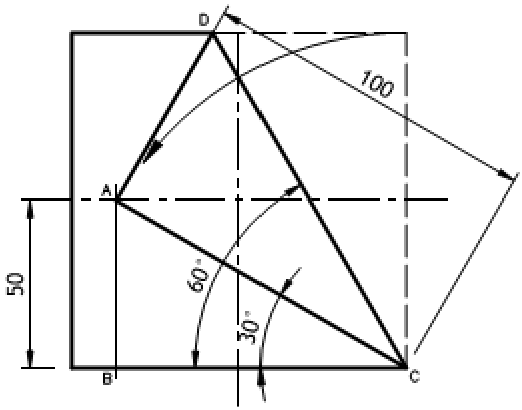


Figura 21. Segundo pliegue. Deja un ángulo de 60°

Tal como nos habíamos propuesto se ha conseguido formar un ángulo de 60°.

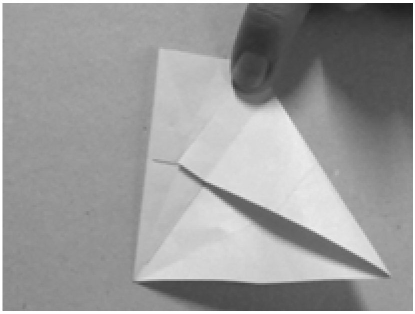


Figura 22. Como se vería el segundo pliegue del cuadrado

Se hace un pliegue simétrico del segundo con lo que ya queda marcado el triángulo equilátero en el cuadrado.

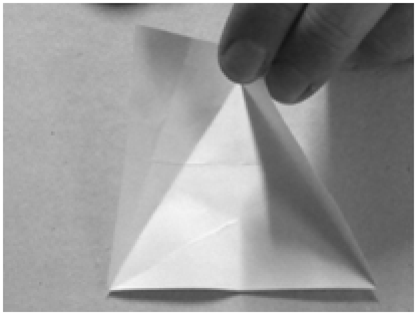
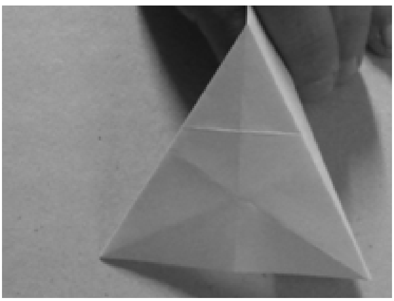


Figura 23. Cuadrado con pliegues

Y finalmente se puede mostrar el resultado.



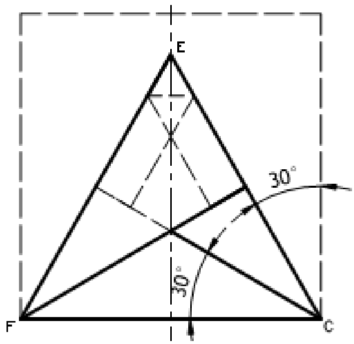


Figura 24. Triángulo equilátero plegado en el cuadrado

Problema 5. El mejor triángulo

No conformes con ver resuelta la obtención del triángulo equilátero me pidieron obtener el triángulo equilátero más grande posible con la servilletita cuadrada que cada vez me parecía más chiquitita. O sea, partiendo de un trozo de papel cuadrado, plegarlo de manera tal que se obtenga el mayor triángulo equilátero posible.

Pautas para resolver

Siguiendo una de las sugerencias de las técnicas para resolver problemas vemos que el problema anterior nos puede dar alguna idea para resolver; solo que ahora debemos pensar como se puede aumentar el tamaño del triángulo presentado.

Resolución

A poco de observar la figura lograda en el problema anterior vemos que si giramos el triángulo alrededor de unos sus vértices de modo que coincida con un vértice del cuadrado, como muestra el croquis a la derecha, hay espacio para incrementar sus medidas.

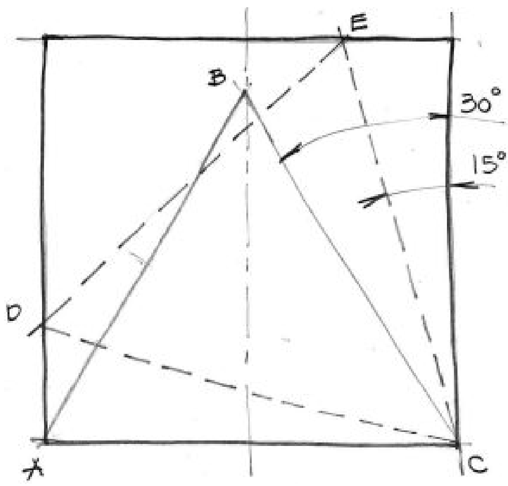


Figura 25. Girar permite agrandar la figura

Si el giro es de 15° podremos agrandar el triángulo, alargando los lados hasta intersecar los lados del cuadrado.

Trabajando sobre el papel debemos hacer pliegues que dividan en dos al ángulo de 30°. Los nuevos pliegues marcan un par de lados. Un nuevo pliegue que pase por la intersección de los pliegues últimos con el borde del papel demardemarcará el lado faltante.

El triángulo que obtenido se puede apreciar en la figura 26.

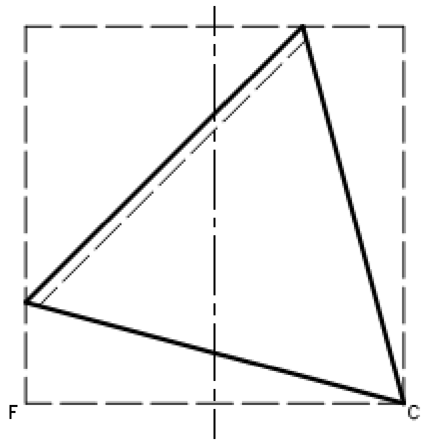


Figura 26. Prolongación lados del triángulo

Problema 6. Medir en un cuadrado

El lado del cuadrado grande es 50. ¿Cuánto mide el radio de la circunferencia?

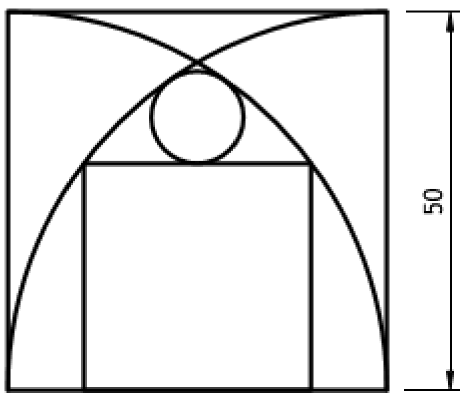


Figura 27. Determinar radio de la circunferencia

Pautas para resolver

Interesa destacar que este problema puede ser resuelto por alguno de los siguientes métodos: algebraico, gráfico o CAD.

Resolución por Método Algebraico

En la figura 28 identificamos algunos puntos de interés para nuestro análisis.

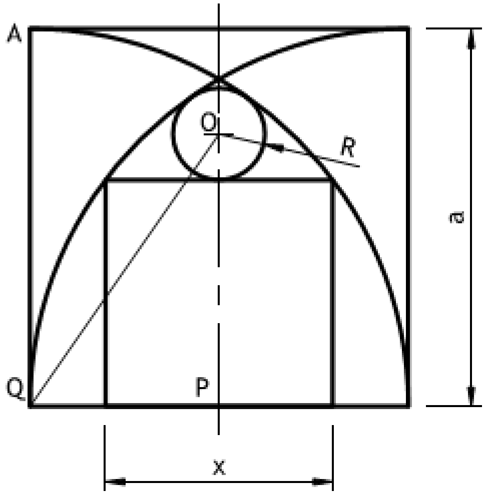


Figura 28. Identificaciones para el análisis.

En primer lugar calculamos el lado del cuadrado interior.

$$\left(\frac{a}{2}+\frac{x}{2}\right)^2 + x^2 = a^2 ==> (x+a)^2 + 4x^2 = 4a^2$$

Resolviendo, obtenemos

$$x = \frac{3}{5}a = \frac{3}{5} \times 50 = 30$$

Con estos datos podemos calcular el radio de la circunferencia.

$$\left(\frac{3}{5}a + R\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = (a-R)^2 \;\rightarrow\; R$$

$$R = \frac{39}{320}a = 12{,}1875$$

Resolución por Método Gráfico

Es evidente que por ser una figura simétrica, el punto medio S del lado del cuadrado interior será el de tangencia a la circunferencia. Prolongamos el lado AQ hasta cortarse con el arco de circunferencia de centro Q para determinar el punto B. Unimos B con S y prolongamos hasta cortar al arco de circunferencia en T. Éste será el punto de empalme entre la circunferencia buscada y el arco Q.

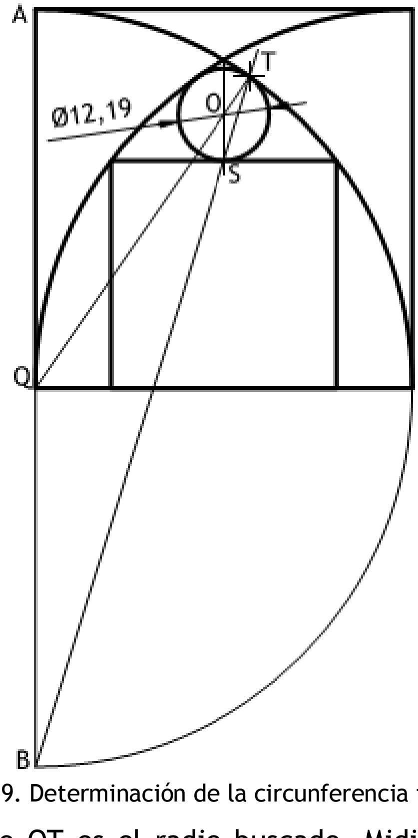


Figura 29. Determinación de la circunferencia tangente

El segmento OT es el radio buscado. Midiéndolo con dos decimales de precisión obtenemos 12,19 que es la cifra exacta redondeada.

Resolución por Método CAD

Con el software CAD se realiza el trazado en base a los datos provistos.

Se traza la circunferencia por tres puntos. Se los elige utilizando la tangencia como referencia a objetos con los dos arcos y el lado del cuadrado.

Se consultan las propiedades de la circunferencia y se obtiene el mismo resultado.

Problema 7. Una cuerda en la plaza

En la plaza hay dos estacas perfectamente verticales, separadas 1,70 metro entre sí. Una de las estacas tiene 2,00 metros de altura; la otra 1,30 metro.

Colgamos una cuerda de 2,40 metros entre los puntos más altos de cada estaca. De la cuerda vamos a colgar una pesa y pretendemos ubicarla en el lugar más bajo posible.

Queremos saber dónde va a estar el punto buscado en relación con las estacas y a qué altura va a quedar.

Pautas para resolver

Conviene hacer un esquema que permita visualizar los elementos que intervienen en el problema. Lo hacemos en forma de croquis que, para el objetivo buscado, es más que suficiente.

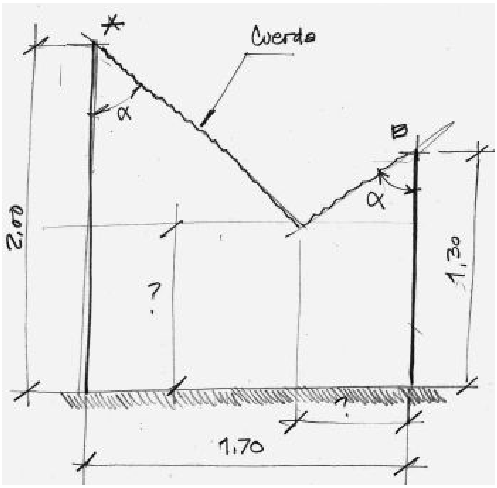


Figura 30. Esquema de la cuerda en la plaza

Observamos lo siguiente: si desplazamos la pesa entre las estacas, el punto en que cuelga la pesa describe una elipse. El movimiento de la pesa coincide con la técnica de trazado conocida como método del Jardinero. Y aquí lo dejamos para que usted intente resolverlo antes de mirar la solución.

Solución

Los puntos de anclaje a las estacas hacen de focos de la elipse. El punto más bajo coincidirá con el punto donde se produzca la tangencial de una recta horizontal con la elipse.

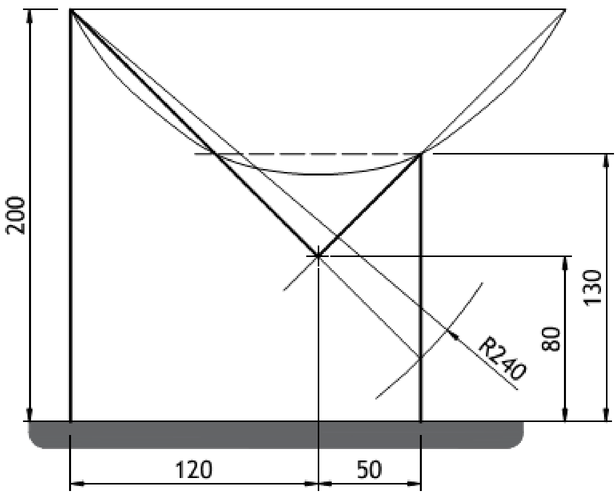


Figura 31. Determinación del punto más bajo de la cuerda

Problema 8. ¿Qué área es más grande?

Las máscaras de figura 32 están compuestas por lúnulas las cabelleras y por un cuadrado y un triángulo las barbas. Se denomina lúnula a la parte del plano comprendido entre dos arcos de círculo con los mismos extremos y con las concavidades hacia el mismo lado.

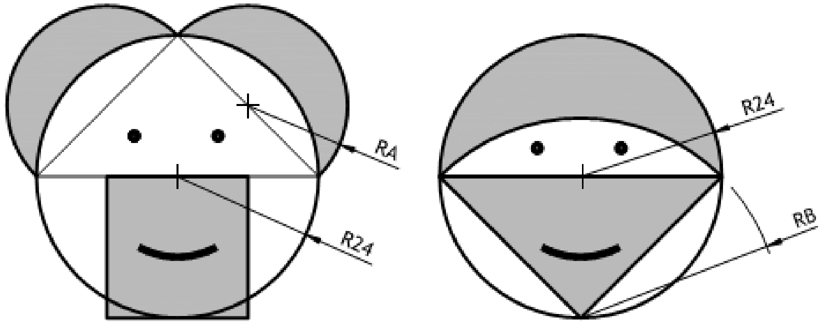


Figura 32. Comparación de lúnulas

La pregunta es: en los dos dibujos dados, ¿Qué ocupa más superficie? La barba o la cabellera; es decir, se deben comparar las áreas sombreadas.

Pautas para resolver

Observando las barbas notamos que el cálculo de la superficie es inmediato. La resolución gráfica de este problema se simplifica totalmente si utilizamos software CAD.

Resolución

Debemos construir las figuras propuestas cuidando especialmente que las áreas de interés queden perfectamente cerradas para entonces poder consultar la superficie al propio software.

En la figura del lado izquierdo la cabellera tiene una superficie de 576 mm2. Igualmente la barba ocupa 576 mm2.

Midiendo la cabellera del lado derecho encontramos que tiene 576 mm2. Igualmente la barba también ocupa 576 mm2.